

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJICH APLIKACE VE ZPRACOVÁNÍ
SIGNÁLU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

VILÉM KÁRSKÝ

BRNO 2015



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ**
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJICH APLIKACE VE ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

ORTHOGONAL BASES AND THEIR APPLICATION IN SIGNAL PROCESSING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

VILÉM KÁRSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. Ing. PAVEL JURA, CSc.

BRNO 2015



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor
Automatizační a měřicí technika

Student: Vilém Káský

ID: 154763

Ročník: 3

Akademický rok: 2014/2015

NÁZEV TÉMATU:

Ortogonalní báze a jejich aplikace ve zpracování signálu

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Prostudujte vybrané typy ortogonálních bází a seznámte se s jejich vlastnostmi. Zaměřte se na bázev systémy Legendreových, Čebyševových, Laguerreových a Hermiteových funkcí.
2. Vypracujte přehled vlastností těchto bází včetně jejich parametrů (interval ortogonalit, váhová funkce, sudost a lichost funkcí, počet nul, asymptotické vlastnosti, Fourierova nebo Laplaceova transformace těchto funkcí,...).
3. V programovém prostředí MATLAB implementujte tyto báze. Provéřte konvergenci implementovaných funkcí pro vysoký řád těchto funkcí. V případě Laguerreových a Hermiteových funkcí prostudujte otázku časového měřítka a implementujte toto měřítko.
4. Aplikujte dané báze pro aproximaci vámi zvolených příkladů signálů. Vhodnou metrikou ohodnoťte chyby těchto aproximací.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. Rektorys K.: Přehled užití matematiky, SNTL Praha 1968
2. Kufner A., Kadlec J.: Fourierovy řady, Academia Praha 1970

Termín zadání: 9.2.2015

Termín odevzdání: 25.5.2015

Vedoucí práce: prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

Konzultanti bakalářské práce:

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Tato práce je zaměřena na zjištění základních vlastností některých ortogonálních polynomů, jako jsou interval ortogonality, váhová funkce, definiční vztahy, rekurentní vztahy, počet nul a jakým diferenciálním rovnicím polynomy vyhovují. Byly zjištěny vztahy pro výpočet koeficientů zobecněných Fourierových řad a zabýval jsem se také volbou volných parametrů u těchto ortogonálních polynomů. Na konci jsou zobrazena spektra několika funkcí v bázích jednotlivých polynomů a průběh chyby aproximace v závislosti na řádu polynomu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Fourierovy řady, Čebyševovy polynomy, Hermitovy polynomy, Laguerrovy polynomy, Legendrovy polynomy, ortogonální polynomy, spektrum funkce, volitelné parametry, chyba aproximace.

ABSTRACT

This work is concentrates on finding basic properties of some orthogonal polynomials like a definition, weight function, orthogonality interval, recurrence relations, number of zeros and differential equations which they were suited on. Subsequently were founded formulas for calculating coefficients of the generalized Fourier series and I concentrate on calculating optimal free parameters on this orthogonal polynomials. In the end of this work are calculated and displayed spectrums of some functions in the bases of individual polynomials and was calculated and displayed approximation error.

KEYWORDS

Fourier series, Chebyshev polynomials, Hermite polynomials, Laguerre polynomials, Legendre polynomials, orthogonal polynomials, spectrum of function, free parameters, approximation error.

KÁRSKÝ, Vilém *ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJICH APLIKACE VE ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2015. 77 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJICH APLIKACE VE ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce, panu Prof. Ing. Pavlu Jurovi, CSc. za odborné konzultace, podnětné návrhy a vedení práce.

Brno

.....

podpis autora

OBSAH

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 10 |
| 1 Definice základních pojmů | 11 |
| 1.1 Prostor L_2 | 11 |
| 1.2 Skalární součin | 11 |
| 1.3 Ortogonální a ortonormální funkce | 11 |
| 1.4 Spektrum | 12 |
| 2 Ortogonální polynomy | 13 |
| 2.1 Legendrovy polynomy | 13 |
| 2.2 Čebyševovy polynomy | 15 |
| 2.3 Hermitovy polynomy | 18 |
| 2.4 Zobecněné Laguerrovy polynomy | 20 |
| 3 Volné parametry ortogonálních polynomů | 23 |
| 3.1 Legendrovy a Čebyševovy polynomy | 23 |
| 3.2 Hermitovy polynomy | 24 |
| 3.3 Laguerrovy polynomy | 24 |
| 4 Implementace algoritmů pro transformaci | 27 |
| 4.1 Funkce pro dopřednou transformaci | 27 |
| 4.2 Funkce pro zpětnou transformaci | 28 |
| 5 Konvergence algoritmů | 29 |
| 6 Ukázka transformace několika signálů do jednotlivých bází | 30 |
| 6.1 Výpočet chyby aproximace | 30 |
| 6.2 Aproximace první funkce | 30 |
| 6.2.1 Čebyševovy polynomy | 31 |
| 6.2.2 Legendrovy polynomy | 31 |
| 6.2.3 Hermitovy polynomy | 32 |
| 6.2.4 Laguerrovy polynomy | 32 |
| 6.3 Aproximace druhé funkce | 39 |
| 6.3.1 Čebyševovy polynomy | 39 |
| 6.3.2 Legendrovy polynomy | 39 |
| 6.3.3 Hermitovy polynomy | 40 |
| 6.3.4 Laguerrovy polynomy | 41 |
| 6.4 Aproximace třetí funkce | 47 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6.4.1 | Čebyševovy polynomy | 47 |
| 6.4.2 | Legendrovy polynomy | 47 |
| 6.4.3 | Hermitovy polynomy | 48 |
| 6.4.4 | Laguerrovy polynomy | 49 |
| 7 | Závěr | 55 |
| | Literatura | 56 |
| | Seznam symbolů, veličin a zkratk | 57 |
| | Seznam příloh | 58 |
| A | Naprogramované funkce v Matlabu | 59 |
| A.1 | Funkce pro dopřednou transformaci | 59 |
| A.1.1 | Čebyševovy polynomy | 59 |
| A.1.2 | Hermitovy polynomy | 60 |
| A.1.3 | Laguerrovy polynomy | 61 |
| A.1.4 | Legendrovy polynomy | 63 |
| A.2 | Funkce pro zpětnou transformaci | 64 |
| A.2.1 | Čebyševovy polynomy | 64 |
| A.2.2 | Hermitovy polynomy | 64 |
| A.2.3 | Laguerrovy polynomy | 65 |
| A.2.4 | Legendrovy polynomy | 65 |
| A.3 | Funkce pro vygenerování polynomu | 66 |
| A.3.1 | Čebyševovy polynomy | 66 |
| A.3.2 | Hermitovy polynomy | 67 |
| A.3.3 | Laguerrovy polynomy | 67 |
| A.3.4 | Legendrovy polynomy | 67 |
| A.4 | Ostatní funkce | 68 |
| A.4.1 | Funkce pro výpočet chyby | 68 |
| A.4.2 | Script pro demonstraci volných parametrů | 68 |
| A.4.3 | Script na ověření konvergence | 69 |
| A.4.4 | Script s demonstračními výpočty | 70 |
| B | Obsah přiloženého CD | 77 |

SEZNAM OBRÁZKŮ

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Prvních pět Legendrových polynomů | 14 |
| 2.2 | Prvních pět Čebyševových polynomů | 16 |
| 2.3 | Prvních pět Hermitových polynomů | 19 |
| 2.4 | Prvních pět zobecněných Laguerrových polynomů pro $\alpha = 0$ | 21 |
| 3.1 | Aproximace Pomocí Hermitových polynomů | 25 |
| 3.2 | Aproximace Pomocí Laguerrových polynomů | 26 |
| 6.1 | Aproximace 1. funkce jednotlivými polynomy | 34 |
| 6.2 | Spektrum 1. funkce v bázi Čebyševových polynomů | 34 |
| 6.3 | Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů | 35 |
| 6.4 | Spektrum 1. funkce v bázi Legendrových polynomů | 35 |
| 6.5 | Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů | 36 |
| 6.6 | Spektrum 1. funkce v bázi Hermitových polynomů | 36 |
| 6.7 | Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů | 37 |
| 6.8 | Spektrum 1. funkce v bázi Laguerrových polynomů | 37 |
| 6.9 | Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů | 38 |
| 6.10 | Aproximace 2. funkce jednotlivými polynomy | 42 |
| 6.11 | Spektrum 2. funkce v bázi Čebyševových polynomů | 42 |
| 6.12 | Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů | 43 |
| 6.13 | Spektrum 2. funkce v bázi Legendrových polynomů | 43 |
| 6.14 | Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů | 44 |
| 6.15 | Spektrum 2. funkce v bázi Hermitových polynomů | 44 |
| 6.16 | Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů | 45 |
| 6.17 | Spektrum 2. funkce v bázi Laguerrových polynomů | 45 |
| 6.18 | Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů | 46 |
| 6.19 | Aproximace 3. funkce jednotlivými polynomy | 50 |
| 6.20 | Spektrum 3. funkce v bázi Čebyševových polynomů | 50 |
| 6.21 | Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů | 51 |
| 6.22 | Spektrum 3. funkce v bázi Legendrových polynomů | 51 |
| 6.23 | Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů | 52 |
| 6.24 | Spektrum 3. funkce v bázi Hermitových polynomů | 52 |
| 6.25 | Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů | 53 |
| 6.26 | Spektrum 3. funkce v bázi Laguerrových polynomů | 53 |
| 6.27 | Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů | 54 |

SEZNAM TABULEK

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | Řád konvergence podle hustoty dělení časové osy pro jednotlivé polynomy | 29 |
| 6.1 | Důležité hodnoty aproximace 1. funkce | 33 |
| 6.2 | Důležité hodnoty aproximace 2. funkce | 41 |
| 6.3 | Důležité hodnoty aproximace 3. funkce | 49 |

ÚVOD

V této práci se zabývám rozkladem funkcí (signálů) do zobecněných Fourierových řad. V elektrotechnice je dobře znám rozklad funkcí do trigonometrických Fourierových řad. Trigonometrické funkce ($\cos(x)$, $\sin(x)$) jsou jedny z funkcí, které tvoří ortogonální bázi. Dalšími funkcemi tvořícími ortogonální báze jsou ortogonální polynomy. V jednotlivých kapitolách rozebírám základní vlastnosti Legendreových polynomů, Čebyševových polynomů, Hermitových polynomů a Laguerrových polynomů. První kapitola se zabývá definováním základních pojmů nezbytných pro další práci. Nejvíce zde čerpám z [1]. Ve druhé kapitole jsou popsány jednotlivé polynomy, jejich vlastnosti a jsou zde uvedeny vztahy pro rozklad funkcí do zobecněných Fourierových řad v daných bázích. U definic a základní vlastností polynomů čerpám z [2, 3, 4]. Dále se zde věnuji volným parametrům u těchto polynomů a také jak je co nejlépe zvolit. V poslední kapitole jsou zobrazena spektra a aproximace několika signálů a je zde zobrazen také průběh chyby v závislosti na počtu koeficientů zobecněné Fourierovy řady.

1 DEFINICE ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Před započítím samotné práce je nutné předem definovat některé pojmy, ze kterých budu v práci vycházet.

1.1 Prostor L_2

Prostor L_2 je prostor funkcí integrovatelných s druhou mocninou.

Definice 1 *Nechť funkce $f(x)$ je reálná a měřitelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokud je integrál*

$$\int_a^b f^2(x) dx \quad (1.1)$$

konvergentní, potom funkce f náleží do prostoru L_2 . Píšeme

$$f \in L_2(a, b). \quad (1.2)$$

Pro funkce f, g takové, že $f, g \in L_2(a, b)$ je

$$\int_a^b f(x)g(x) dx$$

konvergentní [1].

1.2 Skalární součin

Definice 2 *Skalární součin dvou funkcí $f, g \in L_2(a, b)$ je definován, jako číslo*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (1.3)$$

Norma funkce $f \in L_2(a, b)$ je nezáporné číslo

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad [1]. \quad (1.4)$$

1.3 Ortogonální a ortonormální funkce

Definice 3 *Pokud platí, že*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0. \quad (1.5)$$

potom jsou funkce f a g ortogonální v prostoru $L_2(a, b)$, Pokud je navíc norma funkce f rovna jedné

$$\|f\| = 1, \quad (1.6)$$

nazývá se funkce f funkcí normovanou v prostoru $L_2(a, b)$ [1].

Definice 4 Pokud pro konečný, nebo spočetný systém reálných funkcí $f_i \in L_2(a, b)$ platí

$$(f_i, f_k) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k \\ C & \text{pro } i = k, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.7)$$

říkáme, že je tento systém ortogonální s váhou $w(x)$. Pokud je

$$(f_i, f_k) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k \\ 1 & \text{pro } i = k, \end{cases} \quad (1.8)$$

říkáme, že je systém ortonormální s váhou $w(x)$.

Funkce $w(x)$ se nazývá váhovou funkcí a musí platit $w(x) > 0$ skoro všude na intervalu (a, b) [1].

Definice 5 Nechť je systém funkcí $\{f_i\}$ ortogonální a nechť pro systém funkcí $\{g_i\}$ platí

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\|f_i\|}, \quad (1.9)$$

potom je systém funkcí $\{g_i\}$ ortonormální [1].

Definice 6 Zobecněná Fourierova řada k funkci $f(x)$ je řada

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 \dots, \quad (1.10)$$

kde funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ tvoří ortonormální systém v $L_2(a, b)$ a c_1, c_2, c_3, \dots jsou koeficienty Fourierovy řady definované

$$c_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [1]. \quad (1.11)$$

Podle [1, s. 643] mají čísla c_n v prostoru $L_2(a, b)$ nejmenší vzdálenost od funkce $f(x)$ a řada 1.10 konverguje v průměru k $f(x)$.

1.4 Spektrum

Soubor všech koeficientů c_n , zobecněné Fourierovy řady, se nazývá zobecněné spektrum funkce $f(x)$ v určité bázi.

2 ORTOGONÁLNÍ POLYNOMY

2.1 Legendrovy polynomy

Definice Legendrových polynomů převzata z [2, s.8]

Definice 7 Legendrův polynom stupně n , kde $n \in \mathbb{N}_0$, je definován vztahem

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}, \quad (2.1)$$

kde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ značí dolní celou část čísla $\frac{n}{2}$.

Poznámka 1 Legendrův polynom stupně n je dále značen jako $Le_n(x)$.

Prvních pět Legendrových polynomů je:

1.

$$Le_0 = 1$$

2.

$$Le_1 = x$$

3.

$$Le_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

4.

$$Le_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

5.

$$Le_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

a jsou zobrazeny na Obr. 2.1.

Definice 8 Vlastnosti Legendrových polynomů:

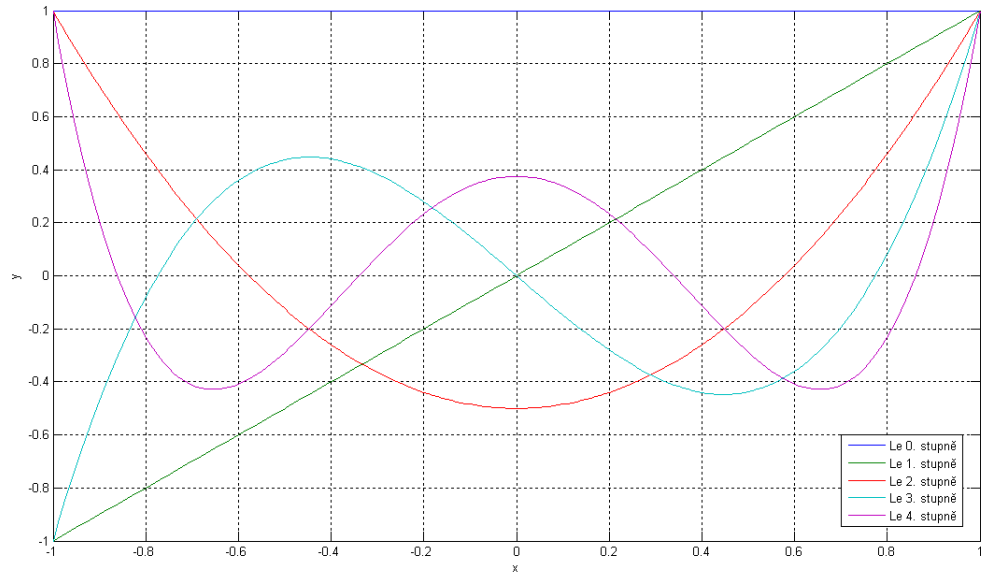
1. Vyhovují diferenciální rovnici $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ [2].
2. Platí pro ně rekurentní vztah:

$$Le_n(x) = \frac{(2n-1)x}{n} Le_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} Le_{n-2}(x) \quad [3]. \quad (2.2)$$

3. Sudé řády polynomu jsou sudé, liché řády polynomu jsou liché nebo-li

$$Le_n(-x) = (-1)^n Le_n(x) \quad [3]. \quad (2.3)$$

4. Všechny nuly polynomu leží na intervalu $< -1, 1 >$ a jejich počet je stejný jako řád polynomu [4].



Obr. 2.1: Prvních pět Legendrových polynomů

5. Chování pro $x = \infty$ a $x = -\infty$:

$$\begin{aligned} Le_n(\infty) &= \infty, \quad n > 0, \\ Le_n(-\infty) &= (-1)^n \infty, \quad n > 0 \quad [3]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

6. Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}\{Le_n(x)\} = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{k} \Gamma(n-2k+1) s^{2k-n-1} \quad [3]. \quad (2.5)$$

7. Jejich váhová funkce je $w(x)=1$ $[2, 4]$.

8. Jsou ortogonální na intervalu $<-1, 1>$ $[2, 4]$ a platí

$$\int_{-1}^1 Le_n(x) Le_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.6)$$

Norma Legendrových polynomů je

$$\| Le_n(x) \| = \sqrt{\int_{-1}^1 Le_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (2.7)$$

Z normy Legendrových polynomů (2.7) a z definice 5 vyplývá, že systém

$$\varphi_{Le_n}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} Le_n(x) \quad (2.8)$$

je na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ ortonormální. Potom musí platit

$$\int_{-1}^1 \varphi_{Len}(x) \varphi_{Lem}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.9)$$

Dosazením za $\varphi_{Len}(x)$ z výrazu (2.8) dostaneme

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 Le_n(x) Le_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.10)$$

Věta 1 Pro koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) Le_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.11)$$

kde funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Le_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \text{ je v bodě } x \text{ spojitá} \\ \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)), & f(x) \text{ je v bodě } x \text{ nespojitá} \end{cases}, \quad (2.12)$$

kde, $f(x+0)$, resp. $f(x-0)$ znamená limitu funkce $f(x)$ zprava, resp. zleva v bodě x [1].

Toto nám umožní transformovat do Fourierovy řady funkce, které jsou definovány na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

2.2 Čebyševovy polynomy

Definice Čebyševových polynomů převzata z [2, s. 46]

Definice 9 Čebyševův polynom stupně n , kde $n \in \mathbb{N}_0$, je definován vztahem

$$P_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (2.13)$$

Poznámka 2 Čebyševův polynom stupně n je dále značen jako $Ce_n(x)$.

Prvních pět Čebyševových polynomů je:

1.

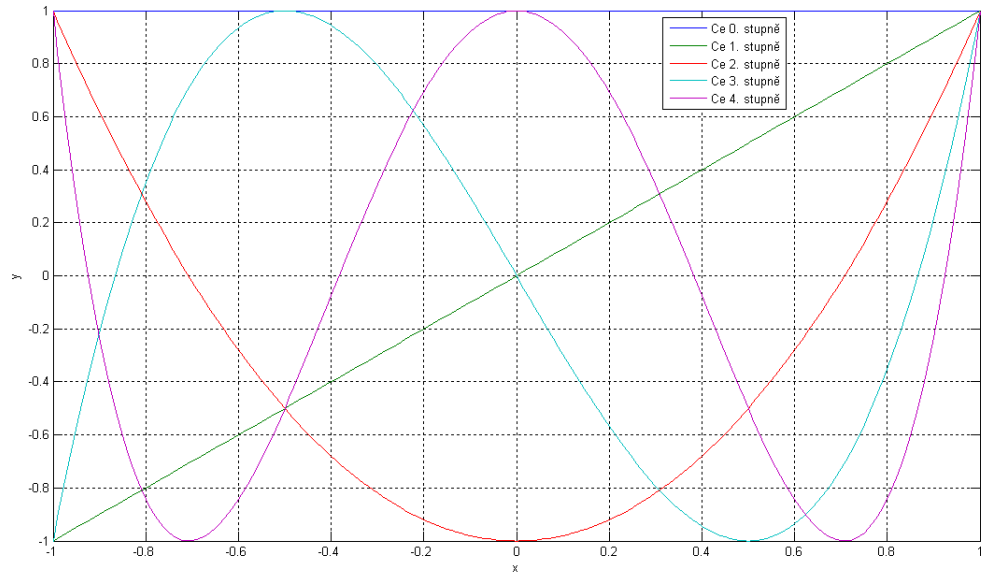
$$Ce_0 = 1$$

2.

$$Ce_1 = x$$

3.

$$Ce_2 = 2x^2 - 1$$



Obr. 2.2: Prvních pět Čebyševových polynomů

4.

$$Ce_3 = 4x^3 - 3x$$

5.

$$Ce_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

a jsou zobrazeny na Obr. 2.2.

Definice 10 *Vlastnosti Čebyševových polynomů:*

1. Vyhovují diferenciální rovnici $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ [2].
2. Platí pro ně rekurentní vztah:

$$Ce_n(x) = 2xCe_{n-1}(x) - Ce_{n-2}(x) \quad [3]. \quad (2.14)$$

3. Sudé řády polynomu jsou sudé, liché řády polynomu jsou liché nebo-li

$$Ce_n(-x) = (-1)^n Ce_n(x) \quad [3]. \quad (2.15)$$

4. Všechny nuly polynomu leží na intervalu $< -1, 1 >$ a jejich počet je stejný jako řád polynomu [4].
5. Chování pro $x = \infty$ a $x = -\infty$:

$$\begin{aligned} Ce_n(\infty) &= \infty, \quad n > 0, \\ Ce_n(-\infty) &= (-1)^n \infty, \quad n > 0 \quad [3]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

6. Laplaceovu transformaci Čebyševových polynomů se mi nepodařilo nalézt.
7. Jejich váhová funkce je $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $[2, 4]$.
8. Jsou ortogonální na intervalu $<-1, 1>$ $[2, 4]$ a platí

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} C_n(x) C_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \pi & \text{pro } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } n = m \neq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Norma Čebyševových polynomů je

$$\| C_n(x) \| = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{C_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{pro } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{pro } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Z normy Čebyševových polynomů (2.18) a z definice 5 vyplývá, že systém

$$\varphi_{C_n}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}} C_n(x) & \text{pro } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_n(x) & \text{pro } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

je na intervalu $<-1, 1>$ ortonormální s váhou $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Potom musí platit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \varphi_{C_n}(x) \varphi_{C_m}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.20)$$

Dosažením za $\varphi_{C_n}(x)$ z rovnice (2.8) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} C_n(x) C_m(x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m, \quad m > 0, n > 0 \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} C_n(x) C_m(x) dx &= 1, \quad n = m = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Věta 2 Pro koeficienty Fourierovy řady platí

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} C_0(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} C_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $<-1, 1>$. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n(x) \quad (2.23)$$

v průměru konverguje k $f(x)$.

Toto nám umožní transformovat do Fourierovy řady funkce, které jsou definovány na intervalu $<-1, 1>$.

2.3 Hermitovy polynomy

Definice Hermitových polynomů převzata z [2, s. 34]

Definice 11 *Hermitův polynom stupně n , kde $n \in \mathbb{N}_0$, je definován vztahem*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{(n-2k)}, \quad (2.24)$$

kde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ značí dolní celou část čísla $\frac{n}{2}$.

Poznámka 3 *Hermitův polynom stupně n je dále značen jako $He_n(x)$.*

Prvních pět Hermitových polynomů je

1.

$$He_0 = 1$$

2.

$$He_1 = 2x$$

3.

$$He_2 = 4x^2 - 2$$

4.

$$He_3 = 8x^3 - 12x$$

5.

$$He_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

a jsou zobrazeny na Obr. 2.3.

Definice 12 *Vlastnosti Hermitových polynomů:*

1. *Vyhovují diferenciální rovnici $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ [2].*
2. *Platí pro ně rekurentní vztah:*

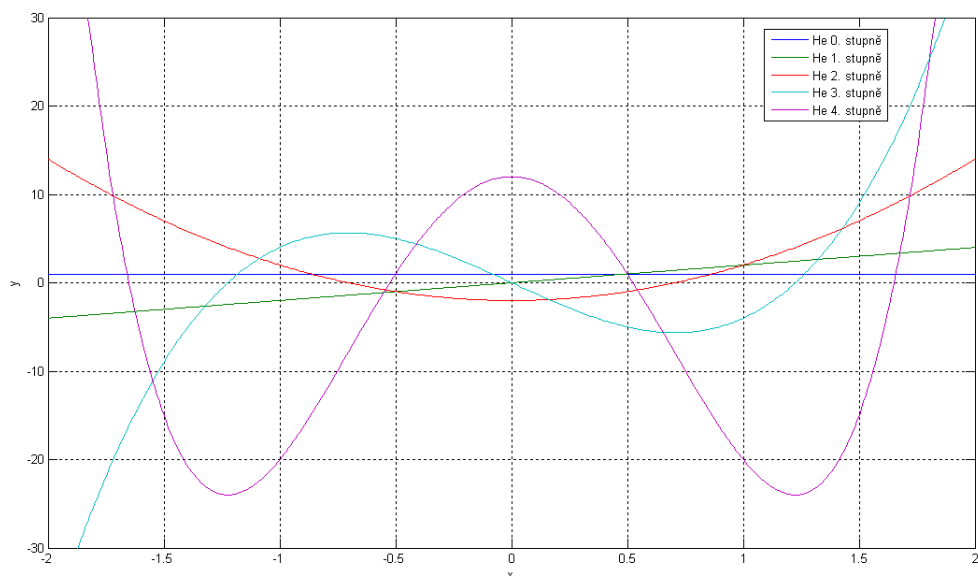
$$He_n(x) = 2xHe_{n-1}(x) - 2(n-1)He_{n-2}(x) \quad [3]. \quad (2.25)$$

3. *Sudé řády polynomu jsou sudé, liché řády polynomu jsou liché nebo-li*

$$He_n(-x) = (-1)^n He_n(x) \quad [3]. \quad (2.26)$$

4. *Všechny nuly polynomu leží na intervalu $< -\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1} >$ a jejich počet je stejný jako řád polynomu [4].*
5. *Chování pro $x = \infty$ a $x = -\infty$:*

$$\begin{aligned} He_n(\infty) &= \infty, \quad n > 0, \\ He_n(-\infty) &= (-1)^n \infty, \quad n > 0 \quad [3]. \end{aligned} \quad (2.27)$$



Obr. 2.3: Prvních pět Hermitových polynomů

6. Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}\{He_n(x)\} = \sqrt{\pi}(-s)^n e^{\frac{1}{4}s^2} \quad [4]. \quad (2.28)$$

7. Jejich váhová funkce je $w(x) = e^{-x^2}$ [2, 4].

8. Jsou ortogonální na intervalu $(-\infty, \infty)$ [2, 4] a platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} He_n(x) He_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.29)$$

Norma Hermitových polynomů je

$$\| He_n(x) \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} He_n^2(x) dx} = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}. \quad (2.30)$$

Z normy Hermitových polynomů (2.30) a z definice 5 vyplývá, že systém

$$\varphi_{Len}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} He_n(x) \quad (2.31)$$

je na intervalu $(-\infty, \infty)$ ortonormální. Potom musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi_{Hen}(x) \varphi_{Hem}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.32)$$

Dosazením za $\varphi_{He_n}(x)$ z výrazu (2.31) dostaneme

$$\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} He_n(x) He_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.33)$$

Věta 3 Pro koeficienty Fourierovy řady platí

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} He_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.34)$$

kde funkce $f(x)$ je integrovatelná v \mathbb{R} . Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n He_n(x) \quad (2.35)$$

v průměru konverguje k $f(x)$.

2.4 Zobecněné Laguerrovy polynomy

Definice zobecněných Laguerrových polynomů převzata z [2, s.24]

Definice 13 Zobecněný Laguerrovův polynom stupně n , kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0$, je definován vztahem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \quad (2.36)$$

Poznámka 4 Zobecněný Laguerrovův polynom stupně n je dále značen jako $La_n^\alpha(x)$.

Prvních pět zobecněných Laguerrových polynomů pro $\alpha = 0$ je

1.

$$La_0^0 = 1$$

2.

$$La_1^0 = 1 - x$$

3.

$$La_2^0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

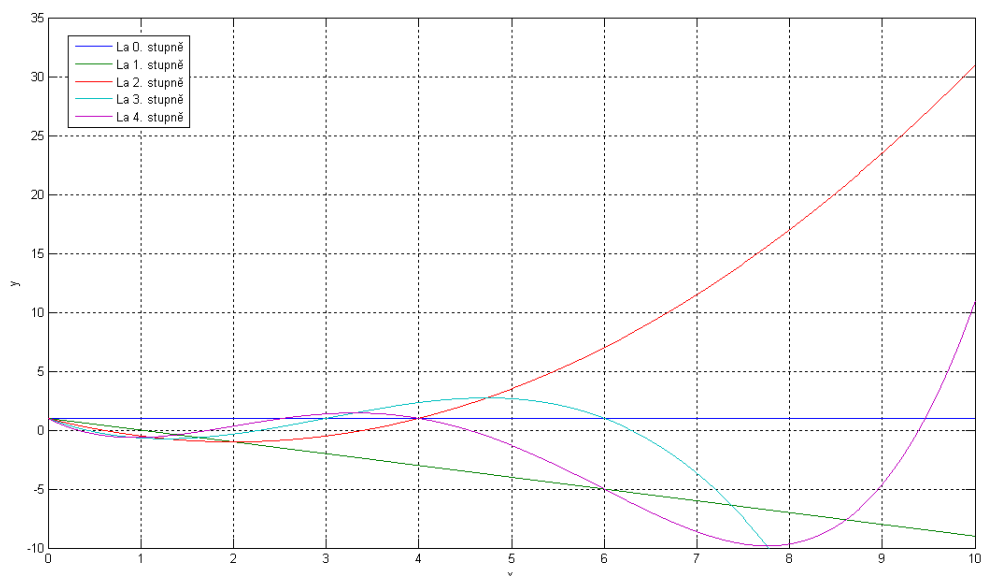
4.

$$La_3^0 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$$

5.

$$La_4^0 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

a jsou zobrazeny na Obr. 2.4.



Obr. 2.4: Prvních pět zobecněných Laguerrových polynomů pro $\alpha = 0$

Definice 14 *Vlastnosti zobecněných Laguerrových polynomů:*

1. Vyhovují diferenciální rovnici $xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0$ [2].
2. Platí pro ně rekurentní vztah:

$$La_n^\alpha(x) = \frac{\alpha + 2n - 1 - x}{n} La_{n-1}^\alpha - \frac{\alpha + n - 1}{n} La_{n-2}^\alpha \quad [3]. \quad (2.37)$$

3. Pro $n > 0$ nejsou ani sudé ani liché, pro $n=0$ jsou sudé.
4. Počet nul je stejný jako řád polynomu a všechny nuly jsou v kladné části reálné osy. [4].
5. Chování pro $x = \infty$ a $x = -\infty$:

$$\begin{aligned} La_n^\alpha(\infty) &= (-1)^n \infty, \quad n > 0, \\ La_n^\alpha(-\infty) &= \infty, \quad n > 0 \quad [3]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

6. Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}\{La_n^\alpha(x)\} = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)s^n}{n!(s + 1)^{\alpha+n+1}} \quad [4]. \quad (2.39)$$

7. Jejich váhová funkce je $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ [2, 4].
8. Jsou ortogonální na intervalu $< 0, \infty)$ [2, 4] a platí

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} La_n^\alpha(x) La_m^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} & \text{pro } n = m, \end{cases} \quad (2.40)$$

kde $\Gamma(x)$ značí Gama funkci.

Norma Laguerrových polynomů je

$$\| La_n^\alpha(x) \| = \sqrt{\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} (La_n^\alpha)^2(x) dx} = \sqrt{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}}. \quad (2.41)$$

Z normy Laguerrových polynomů (2.41) a z definice 5 vyplývá, že systém

$$\varphi_{Lan}(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)}} La_n^\alpha(x) \quad (2.42)$$

je na intervalu $< 0, \infty)$ ortonormální. Potom musí platit

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \varphi_{Lan}(x) \varphi_{Lam}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.43)$$

Dosazením za $\varphi_{Lan}(x)$ z výrazu (2.42) dostaneme

$$\frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} La_n^\alpha(x) La_m^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases} \quad (2.44)$$

Věta 4 *Pro koeficienty Fourierovy řady platí*

$$a_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) La_n^\alpha(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.45)$$

kde funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $< 0, \infty >$. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n La_n^\alpha(x) \quad (2.46)$$

konverguje v průměru k funkci $f(x)$.

3 VOLNÉ PARAMETRY ORTOGONÁLNÍCH POLYNOMŮ

3.1 Legendrovy a Čebyševovy polynomy

Legendrovy a Čebyševovy polynomy jsou ortogonální na intervalu $< -1, 1 >$, to umožňuje transformovat do těchto bází pouze signály, které jsou definovány pouze na intervalu $< -1, 1 >$. Podle [5] je možné u těchto polynomů zavést lineární substituci, pomocí které je možné rozšířit interval ortogonalit na libovolný konečný interval $< c, d >$. Substituci jsem volil ve tvaru

$$x = \sigma(t - t_0), \quad (3.1)$$

potom platí

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \sigma(t - t_0) \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| = \sigma \int_c^d f(\sigma(t - t_0)) dt. \quad (3.2)$$

Substituce 3.1 převádí $t \in < c, d >$ na $x \in < -1, 1 >$. Parametry σ a t_0 získáme vyřešením následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned} -1 &= \sigma(c - t_0), \\ 1 &= \sigma(d - t_0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Po vyřešení rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{d - c}, \\ t_0 &= \frac{c + d}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dosazením substituce 3.1 do vztahu 2.11 bude výsledný vztah pro transformaci signálu do báze Legendrových polynomů

$$a_n = \frac{(2n + 1)\sigma}{2} \int_c^d f(t) Le_n(\sigma(t - t_0)) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.5)$$

a vztah pro zpětnou transformaci bude

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n Le_n(\sigma(t - t_0)). \quad (3.6)$$

Pro Čebyševovy polynomy dosazením substituce 3.1 do vztahu 2.22 dostaneme výsledný vztah pro transformaci

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sigma}{\pi} \int_c^d \frac{f(t)}{\sqrt{1 - (\sigma(t - t_0))^2}} Ce_0(\sigma(t - t_0)) dt, \\ a_n &= \frac{2\sigma}{\pi} \int_c^d \frac{f(t)}{\sqrt{1 - (\sigma(t - t_0))^2}} Ce_n(\sigma(t - t_0)) dt, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

a vztah pro zpětnou transformaci bude

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n C e_n(\sigma(t - t_0)). \quad (3.8)$$

3.2 Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy jsou ortogonální na intervalu $(-\infty, \infty)$, což umožňuje transformovat libovolný reálný signál. Použitím substituce 3.1 v těchto polynomech získáme dva volné parametry (časové měřítko a posun po časové ose). Po dosazení substituce 3.1 do výrazu 2.34 je výsledný vztah pro transformaci signálu do báze Hermitových polynomů

$$a_n = \frac{\sigma}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma(t-t_0))^2} H e_n(\sigma(t - t_0)) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.9)$$

a vztah pro zpětnou transformaci je

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n H e_n(\sigma(t - t_0)). \quad (3.10)$$

Podle [6, 7], při vhodné volbě těchto parametrů, je možné dosáhnout menší chyby aproximace. Tyto parametry se vypočtou za pomoci momentů podle vztahů

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{m_1}{m_0}, \\ \sigma &= \sqrt[4]{\frac{m_0 \mu_0}{m_0 m_2 - m_1^2}} \quad [6, 7]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

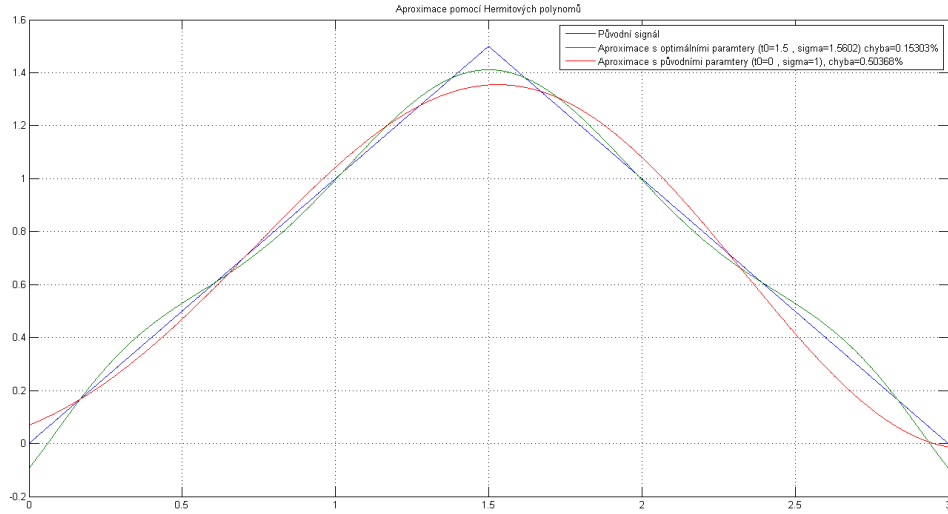
Momenty m_i a μ_i se vypočítají jako skalární součin

$$\begin{aligned} m_i &= (f, t^i f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^i f^2(t) dt, \\ \mu_i &= (f', t^i f') = \int_{-\infty}^{\infty} t^i [f'(t)]^2 dt \quad [6, 7]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na obrázku Obr. 3.1 je pro demonstraci zobrazena aproximace signálu Hermitovými polynomy 10. řádu jednou s optimálními parametry ($t_0 = 1.5$, $\sigma = 1,5602$) a podruhé s parametry $t_0 = 0$ a $\sigma = 1$. Chyba aproximace s optimálními parametry je 0,1530% a při neoptimálně zvolených parametrech je chyba 0,5037%.

3.3 Laguerrovy polynomy

Laguerrovy polynomy jsou ortogonální na intervalu $< 0, \infty)$, což umožňuje transformovat pouze signály, které jsou definovány v kladné části časové osy včetně nuly.



Obr. 3.1: Aproximace Pomocí Hermitových polynomů

Zobecněné Laguerrovy polynomy mají jeden volný parametr α . Podle [6, 8] použitím substituce

$$x = \sigma t, \quad (3.13)$$

získáme i druhý volný parametr. Dosazením substituce 3.13 do vztahu 2.45 získáme výsledný vztah pro transformaci do báze zobecněných Laguerrových polynomů

$$a_n = \frac{n! \sigma}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty (\sigma t)^\alpha e^{-\sigma t} f(t) L_n^\alpha(\sigma t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

Pro zpětnou transformaci z báze Zobecněných Laguerrových polynomů platí vztah

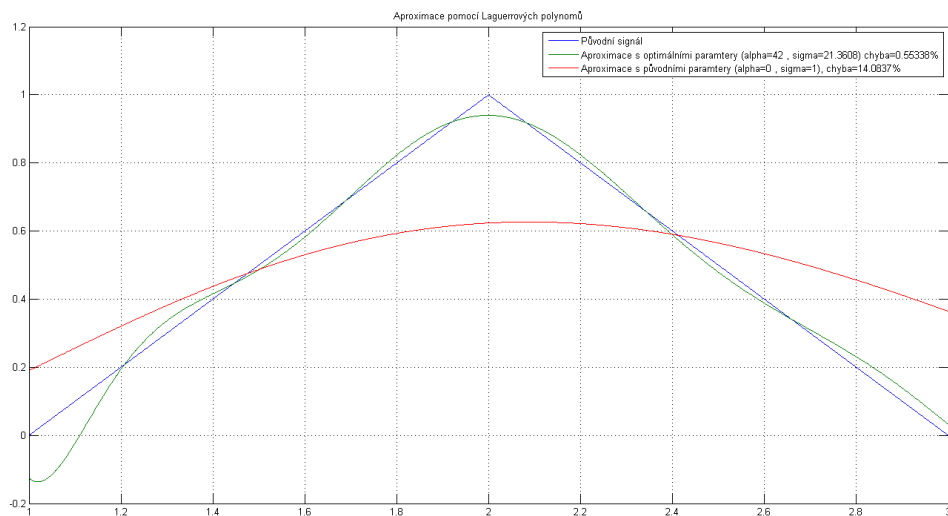
$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^\alpha(\sigma t). \quad (3.15)$$

Podle [6, 8], při vhodné volbě těchto parametrů, je možné dosáhnout menší chyby aproximace. Tyto parametry se vypočtou za pomoci momentů podle vztahů

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \sqrt{\frac{m_{-1} m_2}{|m_1 m_{-1} - m_0^2|}}, \\ \alpha &= \frac{m_0}{m_{-1}} \sigma \quad [6, 8]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Momenty m_i a μ_i se vypočítají jako skalární součin

$$\begin{aligned} m_i &= (f, t^i f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^i f^2(t) dt \\ \mu_i &= (f', t^i f') = \int_{-\infty}^{\infty} t^i [f'(t)]^2 dt \quad [6, 8]. \end{aligned} \quad (3.17)$$



Obr. 3.2: Aproximace Pomocí Laguerrových polynomů

Na obrázku Obr. 3.2 je pro demonstraci zobrazena aproximace signálu zobecněnými Laguerrovými polynomy 10. řádu jednou s optimálními parametry ($\alpha = 42$, $\sigma = 21,3608$) a podruhé s parametry $\alpha = 0$ a $\sigma = 1$. Chyba aproximace s optimálními parametry je 0,5534% a při neoptimálně zvolených parametrech je chyba 14,084%.

4 IMPLEMENTACE ALGORITMŮ PRO TRANSFORMACI

Funkce pro transformaci signálů byly implementovány v programu Matlab 2012b. Nejprve jsem funkce implementoval pomocí symbolického toolboxu, ale výsledné funkce byly příliš pomalé, proto jsem výpočty nakonec řešil numericky.

4.1 Funkce pro dopřednou transformaci

Funkce pro dopřednou transformaci mají čtyři povinné vstupní parametry:

- n - nejvyšší řád polynomu
- $xmin$ - začátek intervalu, kde je definována transformovaná funkce
- $xmax$ - konec intervalu, kde je definována transformovaná funkce
- Y - vektor hodnot transformované funkce

a vrací tři proměnné

- $t0$ - hodnota t_0
- σ - hodnota σ
- $koef$ - vektor koeficientů zobecněné Fourierovy řady v bázi odpovídajících polynomů.

Při transformaci do báze Laguerrových polynomů je " $t0$ " nahrazena proměnnou " α ", pomocí které je vrácena hodnota volného parametru α Zobecněných Laguerrových polynomů. U funkcí pro transformaci do báze Laguerrových a Hermitových polynomů je ještě nepovinný parametr. Pokud se tento nepovinný parametr rovná 'p', potom jsou volné parametry daných polynomů nastaveny na výchozí hodnoty ($\alpha = t_0 = 0$ a $\sigma = 1$).

Všechny funkce fungují obdobně. Na začátku funkce se vygeneruje vektor " X " od hodnoty " $xmin$ " do hodnoty " $xmax$ " se stejným počtem prvků jako má vektor s hodnotami transformované funkce. Po vygenerování vektoru " X " se spočítají volné parametry jednotlivých polynomů. Následně se v cyklu pomocí rekurentních vztahů počítají jednotlivé řády daného polynomu. Dále se do matice ukládá součin příslušného polynomu s váhovou funkcí a hodnotami transformované funkce tak, že jednotlivé sloupce odpovídají řádu polynomu. Potom je numericky provedena integrace matice, kdy je zintegrován každý sloupec a výsledky integrace jsou uloženy do vektoru " $koef$ ". Nakonec je tento vektor vynásoben druhou mocninou normy odpovídajícího polynomu. Tento vektor již obsahuje koeficienty zobecněné Fourierovy řady v příslušné bázi.

Tyto funkce jsou uloženy na přiloženém CD v těchto souborech:

- CeTransf.m - transformace do báze Čebyševových polynomů
- HeTransf.m - transformace do báze Hermitových polynomů
- LaTransf.m - transformace do báze Laguerrových polynomů
- LeTransf.m - transformace do báze Legendrových polynomů

4.2 Funkce pro zpětnou transformaci

Funkce pro zpětnou transformaci mají čtyři povinné vstupní parametry:

- Cn - koeficienty zobecněné Fourierovy řady v dané bázi
- X - vektor časové osy
- t0 - volitelný parametr daného polynomu t_0
- sigma - volitelný parametr daného polynomu σ

a vrací vektor "M", který obsahuje průběh zpětně transformovaného signálu a má stejný počet hodnot jako vstupní vektor "X". Při zpětné transformaci z báze Laguerrových polynomů je parametr "t0" nahrazen parametrem "alpha", kterým předáme hodnotu volného parametru α .

Opět všechny funkce fungují obdobně. Nejprve je vygenerován nulový vektor "M" s počtem prvků shodným s počtem prvků vektoru "X". Potom je v cyklu numericky, pomocí rekurentního vztahu, generován odpovídající polynom n-tého řádu. Tento polynom je poté vynásoben n-tým koeficientem zobecněné Fourierovy řady a tento součin je přičten k vektoru "M". Na konci funkce tento vektor obsahuje aproximaci funkce pomocí daných polynomů.

Tyto funkce jsou uloženy na přiloženém CD v těchto souborech:

- CeZTransf.m - transformace z báze Čebyševových polynomů
- HeZTransf.m - transformace z báze Hermitových polynomů
- LaZTransf.m - transformace z báze Laguerrových polynomů
- LeZTransf.m - transformace z báze Legendrových polynomů

Tab. 5.1: Řád konvergence podle hustoty dělení časové osy pro jednotlivé polynomy

| | Čebyševovy polynomy | Legendrov polynomy | Hermitovy polynomy | Laguerrov polynomy |
|-----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| h=200 | 33 | 38 | 77 | 7* |
| h=2 000 | 105 | 122 | 205 | 55* |
| h=20 000 | 333 | 389 | 205 | 75 |
| h=200 000 | >400 | >400 | 205 | 362 |

* - Interval, na kterém byly hledány nuly byl omezen na $< 0, 200 >$, jinak byl krok příliš velký a algoritmus nekonvergoval.

5 KONVERGENCE ALGORITMŮ

Jelikož je celý výpočet prováděn numericky, nikoliv pomocí symbolického toolboxu, může během výpočtu dojít k nepřesnosti vlivem zaokrouhlování. Protože funkce pro transformaci jsou drobným rozšířením funkcí pro generování daných polynomů, tak celá konvergence záleží hlavně na konvergenci těchto algoritmů, kterými jsou dané polynomy generovány. Konvergenci jsem ověřoval tak, že jsem v cyklu generoval jednotlivé polynomy stupně n (do maximálního řádu 400) na intervalu, na kterém jsou ortogonální (u Hermitových polynomů jsem využíval interval, ve kterém leží všechny nuly pro nejvyšší generovaný řád, což je interval $< -28, 3; 28, 3 >$, u Laguerrových polynomů jsem zvolil interval $< 0, 2000 >$, rozšířením intervalu dále se výsledky nelepšily). U vygenerovaného polynomu jsem vždy spočítal všechny nuly, následně jsem hledal řád, při kterém přestal souhlasit řád polynomu s počtem nul polynomu. Do tohoto bodu je algoritmus pro generování polynomu stabilní, dále již ne, protože vygenerovaný polynom již nemá správné vlastnosti. Zjistil jsem, že řád polynomu, do kterého je algoritmus stabilní, závisí i na jemnosti dělení časové osy. Provedl jsem srovnání pro rozdělení zkoumaného intervalu u všech polynomů na 200, 2 000, 20 000 a 200 000 dílků. Výsledky jsou shrnuty v tabulce Tab. 5.1.

Dále jsem vypožoroval u Laguerrových polynomů, že pokud je koeficient α a koeficient σ velký (větší než cca 100), při výpočtu dojde k přesáhnutí maximálního rozsahu čísel a ve výsledném vektoru je pouze NaN (Not a Number - Není číslo).

Při transformaci do bází Laguerrových a Hermitových polynomů se ve výpočtu vyskytuje faktoriál řádu polynomu. Maximální číslo, ze kterého lze spočítat faktoriál v programu Matlab, je číslo 170, proto nelze signály aproximovat vyšším řádem Hermitových a Laguerrových polynomů, než je řád 170.

6 UKÁZKA TRANSFORMACE NĚKOLIKA SIGNÁLŮ DO JEDNOTLIVÝCH BÁZÍ

Pro demonstraci bylo zvoleno několik signálů, ke kterým byla spočítána spektra ve všech bázích a následně byla provedena zpětná transformace. Dále byl zobrazen i průběh chyby aproximace v závislosti na nejvyšším řádu polynomu v aproximaci. Koeficienty zobecněných Fourierových řad jsou vždy počítány do 35. řádu polynomu.

6.1 Výpočet chyby aproximace

Pro porovnání chyby aproximace jednotlivými bázemi, jsem zvolil kvadratickou odchylku mezi původní funkcí $f(t)$ a její aproximací $\tilde{f}(t)$. Tato absolutní chyba se vypočte podle vzorce

$$E = \int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt \quad (6.1)$$

a relativní chyba se vypočte podle vzorce

$$e = \frac{E}{\int_a^b |f(t)|^2 dt} 100 = \frac{\int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt}{\int_a^b |f(t)|^2 dt} 100 \quad [\%]. \quad (6.2)$$

Funkce pro výpočet této chyby je napsána v programu Matlab. Její vstupní parametry jsou:

- Original - vektor hodnot původního signálu
- Aproximace - vektor hodnot aproximovaného signálu
- h - krok dělení časové osy

a vrací relativní chybu vypočtenou podle vztahu 6.2.

6.2 Aproximace první funkce

Jako první funkci jsem zvolil trojúhelníkovou funkci definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t - 2 & \text{pro } t \in < 2, 12 > \\ 22 - t & \text{pro } t \in (12, 22 > \\ 0 & \text{pro } x \notin < 2, 22 > . \end{cases} \quad (6.3)$$

V tabulce Tab. 6.1 jsou shrnuty parametry aproximace první funkce jednotlivými polynomy a na Obr. 6.1 je zobrazena původní funkce a její aproximace pomocí jednotlivých polynomů.

6.2.1 Čebyševovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Čebyševových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2}{t_{max} - t_{min}} = \frac{2}{22 - 2} = \frac{1}{10}, \\ t_0 &= \frac{t_{max} + t_{min}}{2} = \frac{22 + 2}{2} = 12.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{0,1}{\pi} \int_2^{12} \frac{(t-2)Ce_0(0,1(t-12))}{\sqrt{1-(0,1(t-12))^2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{12}^{22} \frac{(22-t)Ce_0(0,1(t-12))}{\sqrt{1-(0,1(t-12))^2}} dt, \\ a_n &= \frac{0,2}{\pi} \int_2^{12} \frac{(t-2)Ce_n(0,1(t-12))}{\sqrt{1-(0,1(t-12))^2}} dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{12}^{22} \frac{(22-t)Ce_n(0,1(t-12))}{\sqrt{1-(0,1(t-12))^2}} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{6.5}$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.2. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n Ce_n(0,1(t-12)).\tag{6.6}$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Čebyševových polynomů je na obrázku Obr. 6.3.

6.2.2 Legendrové polynomy

Při transformaci signálu do báze Legendrových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2}{t_{max} - t_{min}} = \frac{2}{22 - 2} = \frac{1}{10}, \\ t_0 &= \frac{t_{max} + t_{min}}{2} = \frac{22 + 2}{2} = 12.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{0,1(2n+1)}{2} \int_2^{12} (t-2)Le_n(0,1(t-12))dt + \\ &+ \frac{2n+1}{2} \int_{12}^{22} (22-t)Le_n(0,1(t-12))dt.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.4. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n Le_n(0,1(t-12)).\tag{6.9}$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Legendrových polynomů je na obrázku Obr. 6.5.

6.2.3 Hermitovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Hermitových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_2^{12} (t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} (22-t)^2 dt = \frac{2\,000}{3}, \\ m_1 &= \int_2^{12} t(t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} t(22-t)^2 dt = 8\,000, \\ m_2 &= \int_2^{12} t^2(t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} t^2(22-t)^2 dt = \frac{308\,000}{3}, \\ \mu_0 &= \int_2^{12} [(t-2)']^2 dt + \int_{12}^{22} [(22-t)']^2 dt = \int_2^{12} 1 dt + \int_{12}^{22} 1 dt = 20. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt[4]{\frac{m_0 \mu_0}{m_0 m_2 - m_1^2}} = 0,2340, \\ t_0 &= \frac{m_1}{m_0} = 12. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{0,2340}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_2^{12} (t-2) e^{-x^2} H_n(0,2340(t-12)) dt + \\ &+ \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{12}^{22} (22-t) e^{-x^2} H_n(0,2340(t-12)) dt. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.6. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n H_n(0,2340(t-12)). \quad (6.13)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Hermitových polynomů je na obrázku Obr. 6.7.

6.2.4 Laguerrovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Laguerrových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned} m_{-1} &= \int_2^{12} t^{-1}(t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} t^{-1}(22-t)^2 dt = 60,5368, \\ m_0 &= \int_2^{12} (t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} (22-t)^2 dt = \frac{2\,000}{3}, \\ m_1 &= \int_2^{12} t(t-2)^2 dt + \int_{12}^{22} t(22-t)^2 dt = 8\,000, \\ \mu_1 &= \int_2^{12} t[(t-2)']^2 dt + \int_{12}^{22} t[(22-t)']^2 dt = \int_2^{12} t dt + \int_{12}^{22} t dt = 240. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Tab. 6.1: Důležité hodnoty aproximace 1. funkce

| | Čebyševovy polynomy | Legendrovy polynomy | Hermitovy polynomy | Laguerrovy polynomy |
|------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| σ | 0,1 | 0,1 | 0,2340 | 1,2076 |
| t_0/α | 12 | 12 | 12 | 13 |
| konečná chyba aproximace [%] | 0,0014 | 0,0014 | 0,0244 | 0,9544 |

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\sqrt{\frac{m_{-1}\mu_1}{m_{-1}m_1 - m_0^2}} = 1,2076, \\ \alpha &= \sigma \frac{m_0}{m_{-1}} = 13.\end{aligned}\tag{6.15}$$

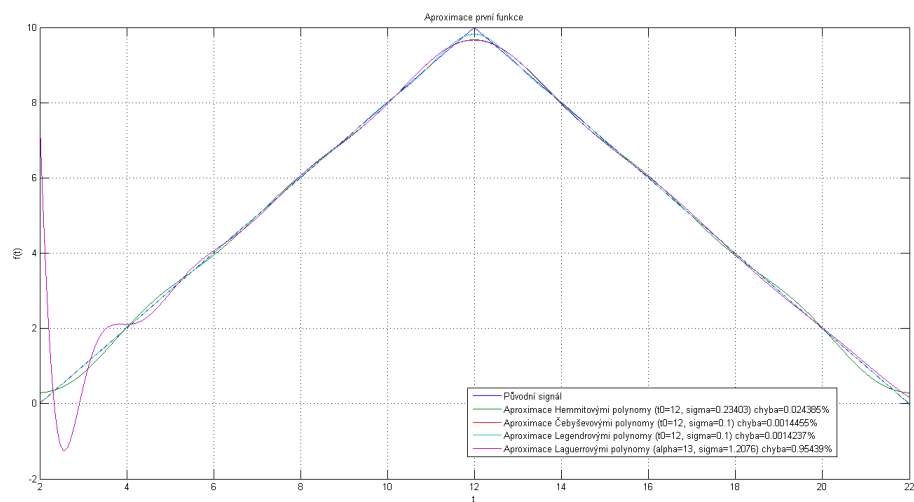
Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n!1,2076}{\Gamma(n+14)} \int_2^{12} (t-2)(1,2076t)^{13} e^{-1,2076t} La_n^{13}(1,2076t) dt + \\ &+ \frac{n!1,2076}{\Gamma(n+14)} \int_{12}^{22} (22-t)(1,2076t)^{13} e^{-1,2076t} La_n^{13}(1,2076t) dt.\end{aligned}\tag{6.16}$$

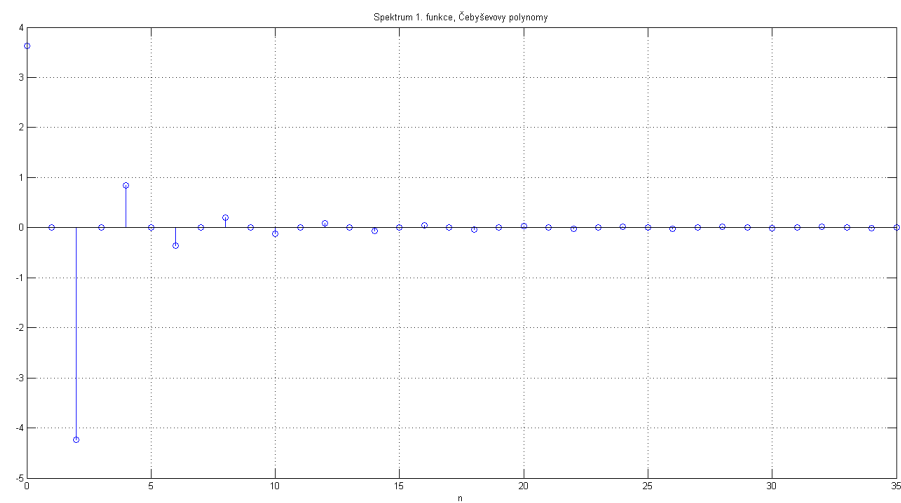
Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.8. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n La_n^{13}(1,2076t).\tag{6.17}$$

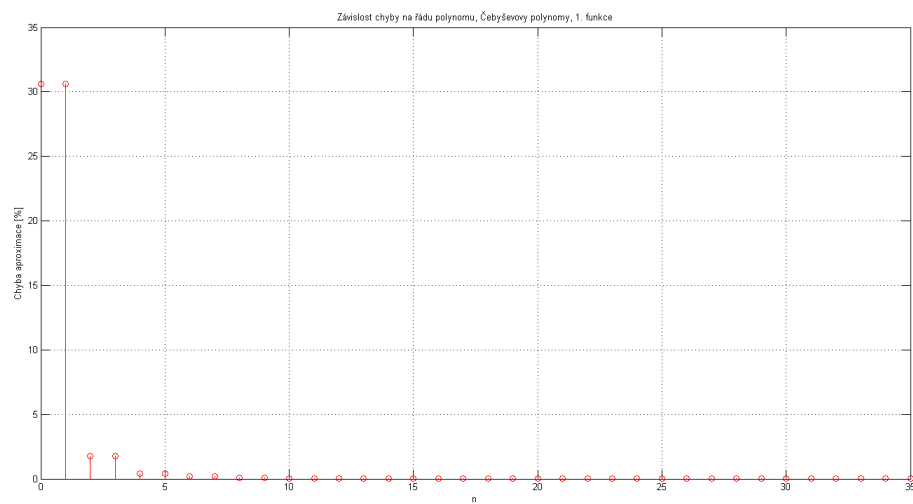
Chyba aproximace v závislosti na řádu Laguerrových polynomů je na obrázku Obr. 6.9.



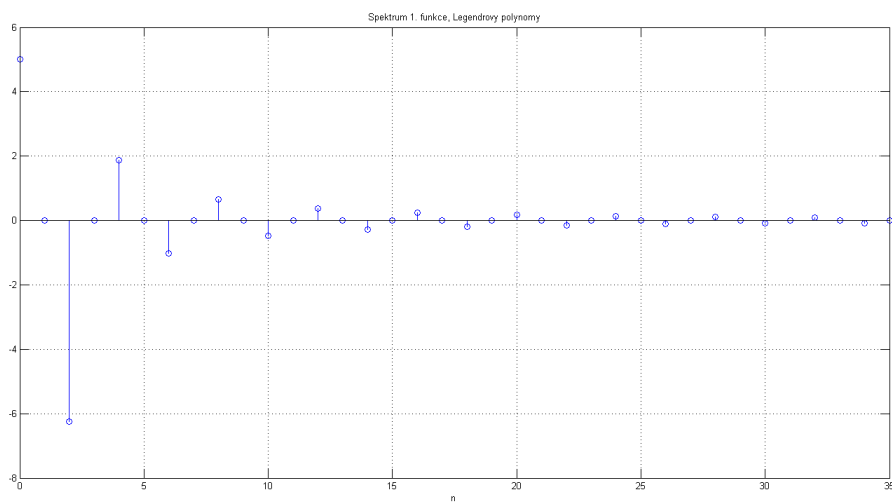
Obr. 6.1: Aproximace 1. funkce jednotlivými polynomy



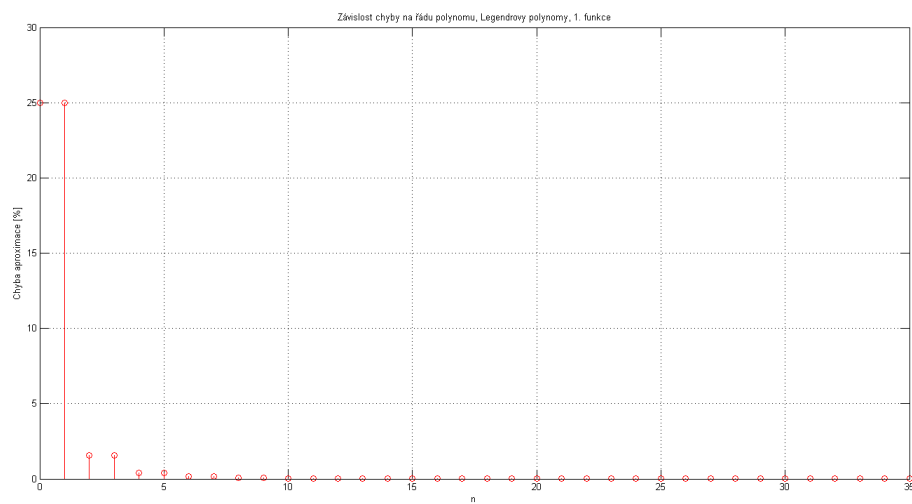
Obr. 6.2: Spektrum 1. funkce v bázi Čebyševových polynomů



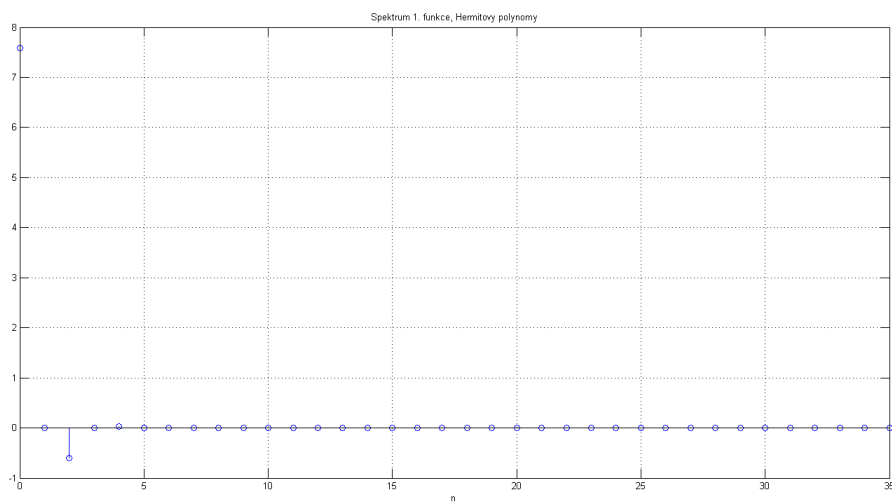
Obr. 6.3: Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů



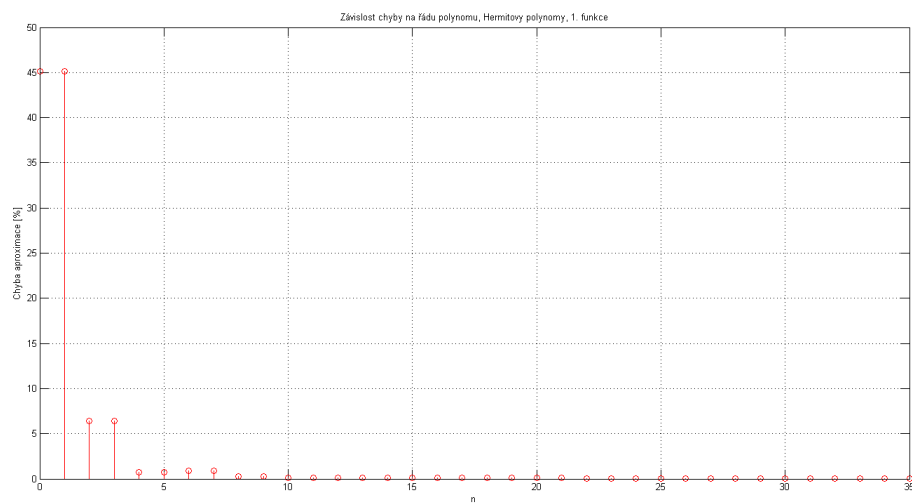
Obr. 6.4: Spektrum 1. funkce v bázi Legendrových polynomů



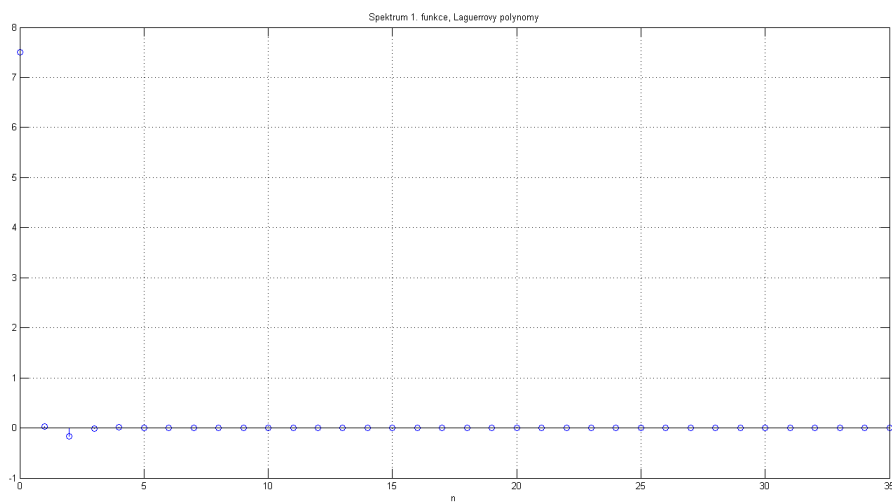
Obr. 6.5: Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů



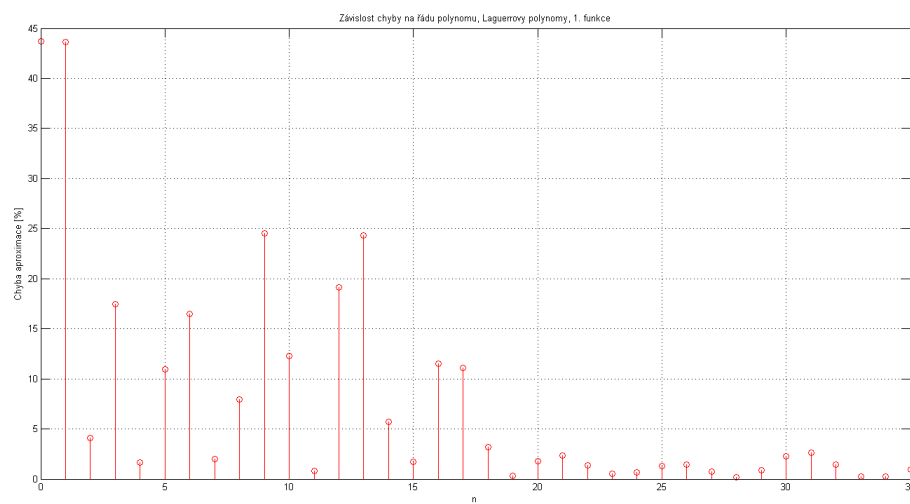
Obr. 6.6: Spektrum 1. funkce v bázi Hermitových polynomů



Obr. 6.7: Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů



Obr. 6.8: Spektrum 1. funkce v bázi Laguerrových polynomů



Obr. 6.9: Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů

6.3 Aproximace druhé funkce

Jako druhou funkci jsem zvolil jednu periodu sinusového průběhu definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{pro } t \in \langle \pi, 3\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle \pi, 3\pi \rangle. \end{cases} \quad (6.18)$$

V tabulce Tab. 6.2 jsou shrnuty parametry aproximace druhé funkce jednotlivými polynomy a na Obr. 6.10 je zobrazena původní funkce a její aproximace pomocí jednotlivých polynomů.

6.3.1 Čebyševovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Čebyševových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{2}{3\pi - \pi} = \frac{1}{\pi}, \\ t_0 &= \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = \frac{3\pi + \pi}{2} = 2\pi. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t) C e_0(\frac{1}{\pi}(t - 2\pi))}{\sqrt{1 - (\frac{1}{\pi}(t - 2\pi))^2}} dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t) C e_n(\frac{1}{\pi}(t - 2\pi))}{\sqrt{1 - (\frac{1}{\pi}(t - 2\pi))^2}} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.11. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n C e_n(\frac{1}{\pi}(t - 2\pi)). \quad (6.21)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Čebyševových polynomů je na obrázku Obr. 6.12.

6.3.2 Legendrovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Legendrových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{2}{3\pi - \pi} = \frac{1}{\pi}, \\ t_0 &= \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = \frac{3\pi + \pi}{2} = 2\pi. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{2n+1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \sin(t) Le_n\left(\frac{1}{\pi}(t-2\pi)\right) dt. \quad (6.23)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.13. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n Le_n\left(\frac{1}{\pi}(t-2\pi)\right). \quad (6.24)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Legendrových polynomů je na obrázku Obr. 6.14.

6.3.3 Hermitovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Hermitových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(t) dt = \pi, \\ m_1 &= \int_{\pi}^{3\pi} t \sin^2(t) dt = 19,7392, \\ m_2 &= \int_{\pi}^{3\pi} t^2 \sin^2(t) dt = 132,790, \\ \mu_0 &= \int_{\pi}^{3\pi} [\sin(t)]^2 dt = \int_{\pi}^{3\pi} \cos^2(t) dt = \pi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt[4]{\frac{m_0 \mu_0}{m_0 m_2 - m_1^2}} = 0,7737, \\ t_0 &= \frac{m_1}{m_0} = 6,2833. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{0,7737}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{3\pi} \sin(t) e^{-x^2} He_n(0,7737(t-6,2833)) dt. \quad (6.27)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.15. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n He_n(0,7737(t-6,2833)). \quad (6.28)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Hermitových polynomů je na obrázku Obr. 6.16.

Tab. 6.2: Důležité hodnoty aproximace 2. funkce

| | Čebyševovy polynomy | Legendrovy polynomy | Hermitovy polynomy | Laguerrovy polynomy |
|------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| σ | $\frac{1}{\pi}$ | $\frac{1}{\pi}$ | 0,7737 | 7,398 |
| t_0/α | 2π | 2π | 7,2833 | 43 |
| konečná chyba aproximace [%] | $1,195 \cdot 10^{-6}$ | $1,187 \cdot 10^{-6}$ | 0,0077 | 0,0081 |

6.3.4 Laguerrovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Laguerrových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned}
 m_{-1} &= \int_{\pi}^{3\pi} t^{-1} \sin^2(t) dt = 0,5394, \\
 m_0 &= \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(t) dt = \pi, \\
 m_1 &= \int_{\pi}^{3\pi} t \sin^2(t) dt = 19,7392, \\
 \mu_1 &= \int_{\pi}^{3\pi} t [\sin(t)']^2 dt = \int_{\pi}^{3\pi} t \cos^2(t) dt = 19,7392.
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned}
 \sigma &= 2 \sqrt{\frac{m_{-1} \mu_1}{m_{-1} m_1 - m_0^2}} = 7,398, \\
 \alpha &= \sigma \frac{m_0}{m_{-1}} = 43.
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

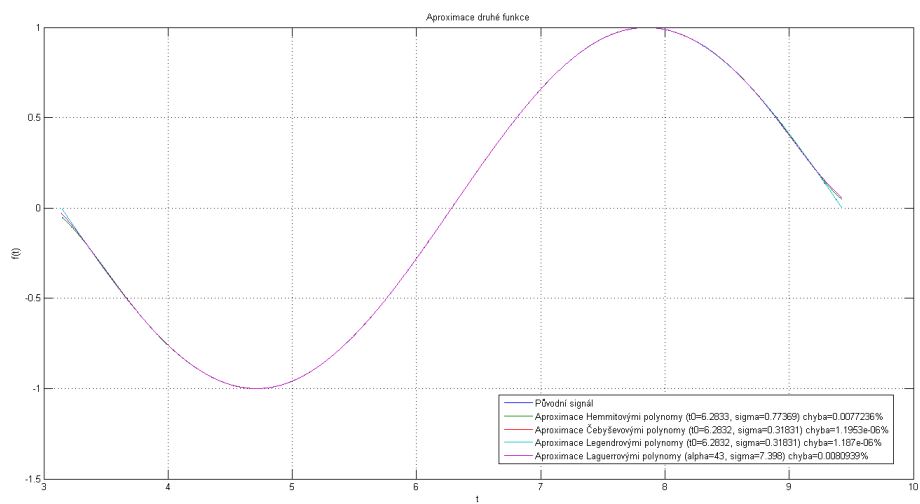
Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{n! 7,398}{\Gamma(n+44)} \int_{\pi}^{3\pi} \sin(t) (7,398t)^{43} e^{-7,398t} L_n^{43}(7,398t) dt. \tag{6.31}$$

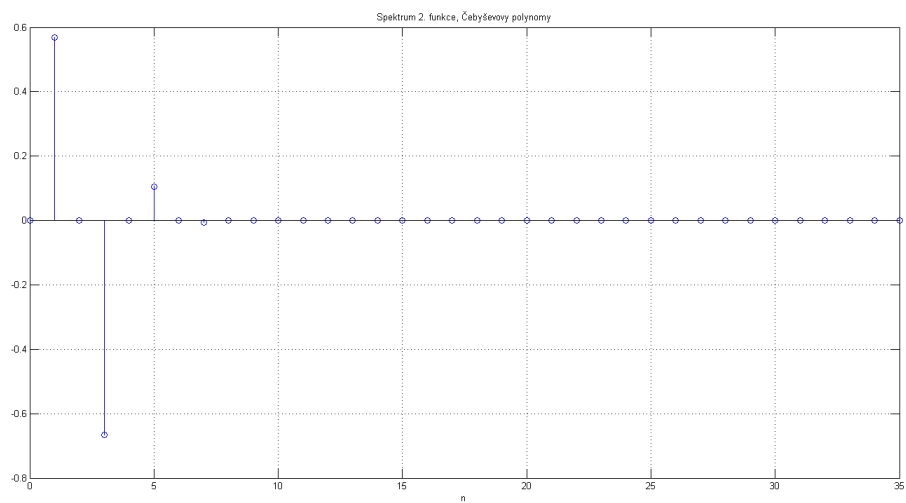
Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.17. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n L_n^{43}(7,398t). \tag{6.32}$$

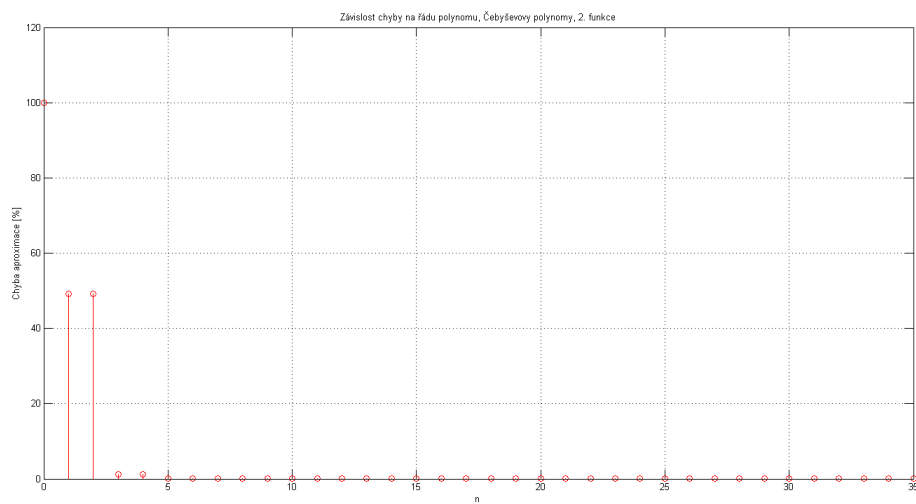
Chyba aproximace v závislosti na řádu Laguerrových polynomů je na obrázku Obr. 6.18.



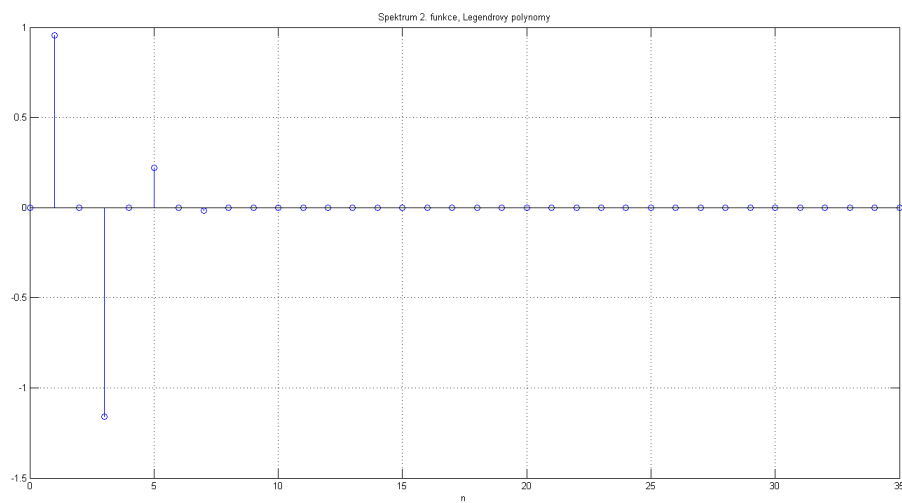
Obr. 6.10: Aproximace 2. funkce jednotlivými polynomy



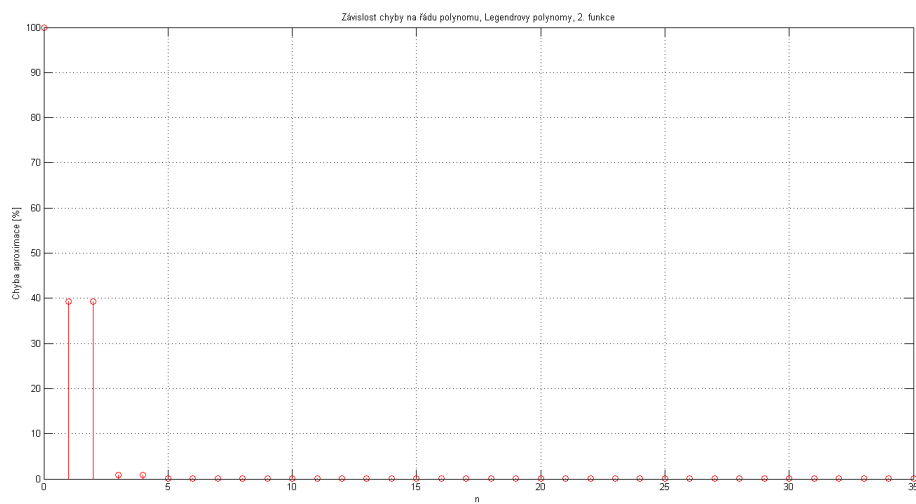
Obr. 6.11: Spektrum 2. funkce v bázi Čebyševových polynomů



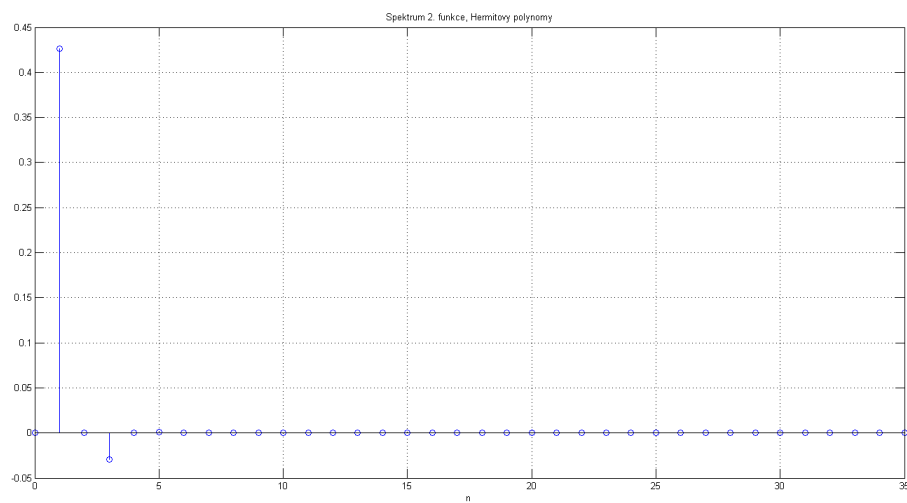
Obr. 6.12: Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů



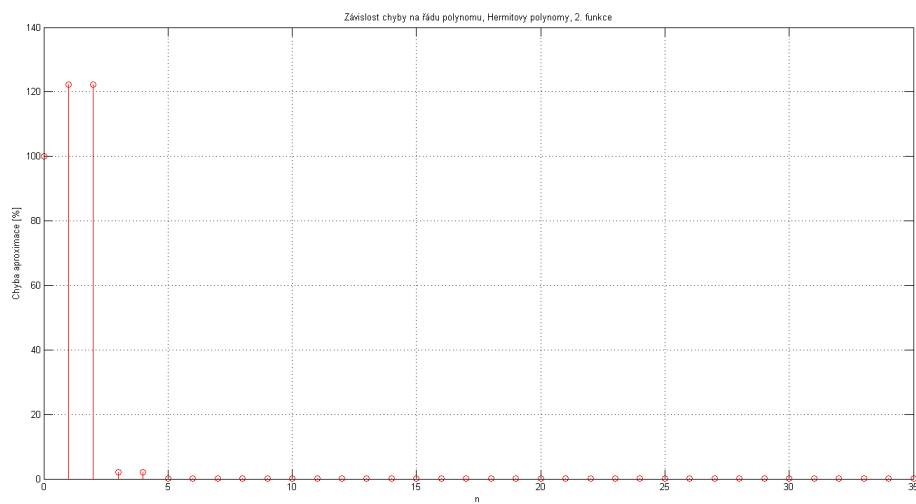
Obr. 6.13: Spektrum 2. funkce v bázi Legendrových polynomů



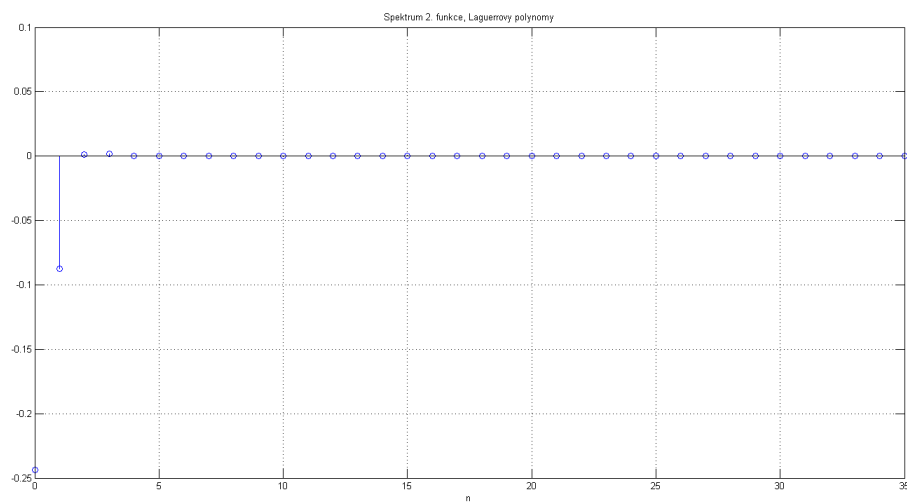
Obr. 6.14: Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů



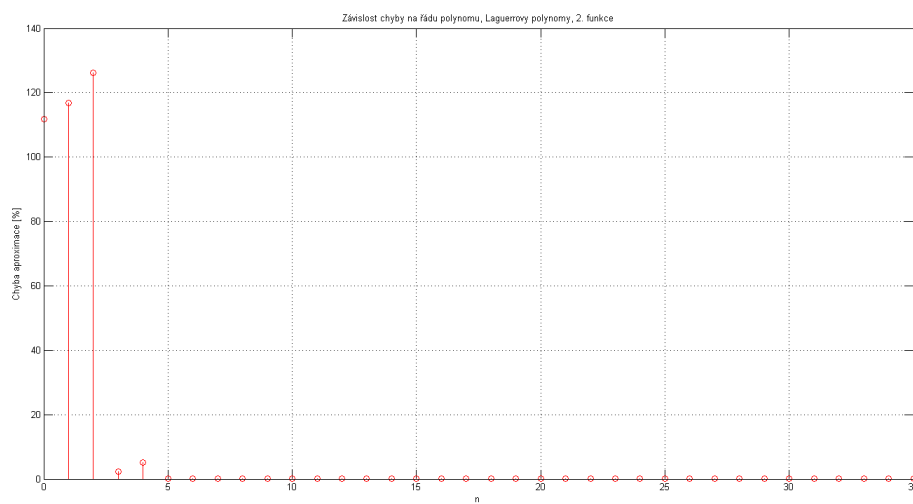
Obr. 6.15: Spektrum 2. funkce v bázi Hermitových polynomů



Obr. 6.16: Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů



Obr. 6.17: Spektrum 2. funkce v bázi Laguerrových polynomů



Obr. 6.18: Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů

6.4 Aproximace třetí funkce

Jako třetí funkci jsem zvolil lineárně klesající signál definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2 - \frac{t}{2} & \text{pro } t \in \langle 2, 4 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 2, 4 \rangle. \end{cases} \quad (6.33)$$

V tabulce Tab. 6.3 jsou shrnuty parametry aproximace třetí funkce jednotlivými polynomy a na Obr. 6.19 je zobrazena původní funkce a její aproximace pomocí jednotlivých polynomů.

6.4.1 Čebyševovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Čebyševových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{2}{4 - 2} = 1, \\ t_0 &= \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_2^4 \frac{(2 - \frac{t}{2})Ce_0(t-3)}{\sqrt{1 - (t-3)^2}} dt, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_2^4 \frac{(2 - \frac{t}{2})Ce_n(t-3)}{\sqrt{1 - (t-3)^2}} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.35)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.20. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n Ce_n(t-3). \quad (6.36)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Čebyševových polynomů je na obrázku Obr. 6.21.

6.4.2 Legendrovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Legendrových polynomů jsou napřed vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{2}{4 - 2} = 1, \\ t_0 &= \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_2^4 (2 - \frac{t}{2}) Le_n(t-3) dt. \quad (6.38)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.22. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n Le_n(t-3). \quad (6.39)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Legendrových polynomů je na obrázku Obr. 6.23.

6.4.3 Hermitovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Hermitových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_2^4 (2 - \frac{t}{2})^2 dt = \frac{2}{3}, \\ m_1 &= \int_2^4 t(2 - \frac{t}{2})^2 dt = \frac{5}{3}, \\ m_2 &= \int_2^4 t^2(2 - \frac{t}{2})^2 dt = \frac{64}{15}, \\ \mu_0 &= \int_2^4 [(2 - \frac{t}{2})']^2 dt = \int_2^4 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt[4]{\frac{m_0 \mu_0}{m_0 m_2 - m_1^2}} = 1,4953, \\ t_0 &= \frac{m_1}{m_0} = 2,5. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{1,4953}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_2^4 (2 - \frac{t}{2}) e^{-x^2} He_n(1,4953(t-2,5)) dt. \quad (6.42)$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.24. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n He_n(1,4953(t-2,5)). \quad (6.43)$$

Chyba aproximace v závislosti na řádu Hermitových polynomů je na obrázku Obr. 6.25.

Tab. 6.3: Důležité hodnoty aproximace 3. funkce

| | Čebyševovy polynomy | Legendrovy polynomy | Hermitovy polynomy | Laguerrovy polynomy |
|------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| σ | 1 | 1 | 1,4953 | 12,87 |
| t_0/α | 3 | 3 | 2,5 | 31 |
| konečná chyba aproximace [%] | 1,132 | $9,7731 \cdot 10^{-5}$ | 1,841 | 1,398 |

6.4.4 Laguerrovy polynomy

Při transformaci signálu do báze Laguerrových polynomů jsou napřed vypočteny potřebné momenty pro výpočet volných parametrů

$$\begin{aligned}
 m_{-1} &= \int_2^4 t^{-1} \left(2 - \frac{t}{2}\right)^2 dt = 0,2726, \\
 m_0 &= \int_2^4 \left(2 - \frac{t}{2}\right)^2 dt = \frac{2}{3}, \\
 m_1 &= \int_2^4 t \left(2 - \frac{t}{2}\right)^2 dt = \frac{5}{3}, \\
 \mu_1 &= \int_2^4 t \left[\left(2 - \frac{t}{2}\right)'\right]^2 dt = \int_2^4 t \frac{1}{4} dt = 1,5.
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Z těchto momentů byly poté vypočteny volné parametry

$$\begin{aligned}
 \sigma &= 2 \sqrt{\frac{m_{-1} \mu_1}{m_{-1} m_1 - m_0^2}} = 12,87, \\
 \alpha &= \sigma \frac{m_0}{m_{-1}} = 31.
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

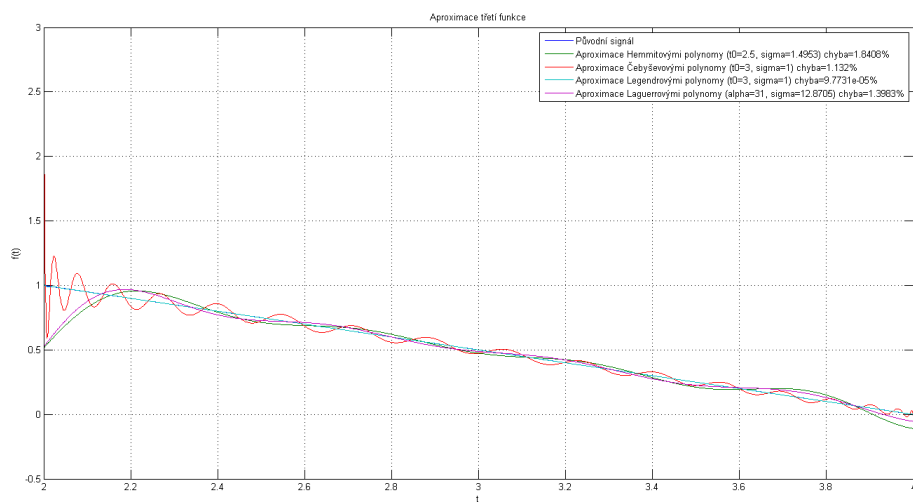
Poté jsou vypočteny vlastní koeficienty spektra

$$a_n = \frac{n! 12,87}{\Gamma(n+32)} \int_{\pi}^{3\pi} \left(2 - \frac{t}{2}\right) (12,87t)^{31} e^{-12,87t} La_n^{31}(12,87t) dt. \tag{6.46}$$

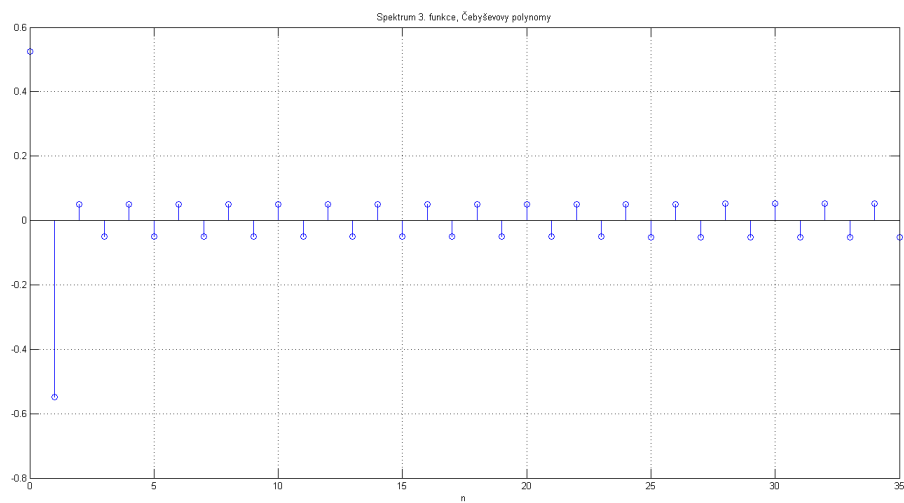
Spektrum je zobrazeno na obrázku Obr. 6.26. Aproximace signálu se vypočte podle vztahu

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{35} a_n La_n^{31}(12,87t). \tag{6.47}$$

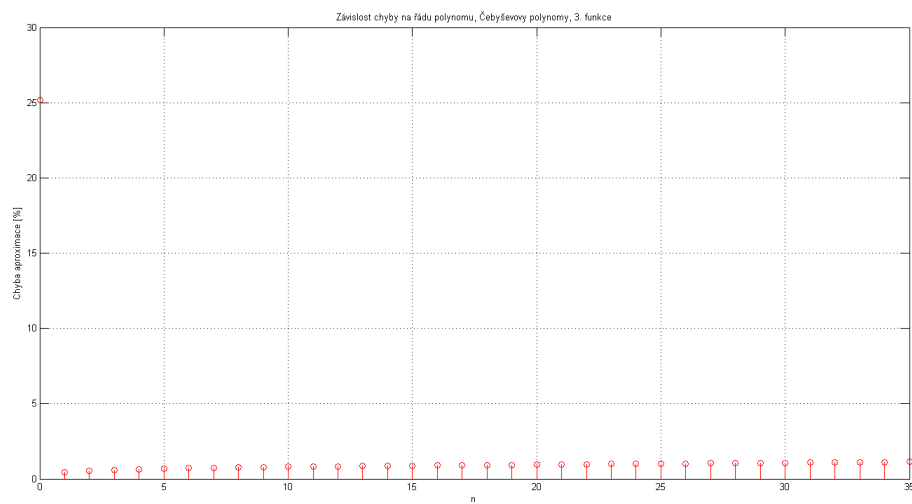
Chyba aproximace v závislosti na řádu Laguerrových polynomů je na obrázku Obr. 6.27.



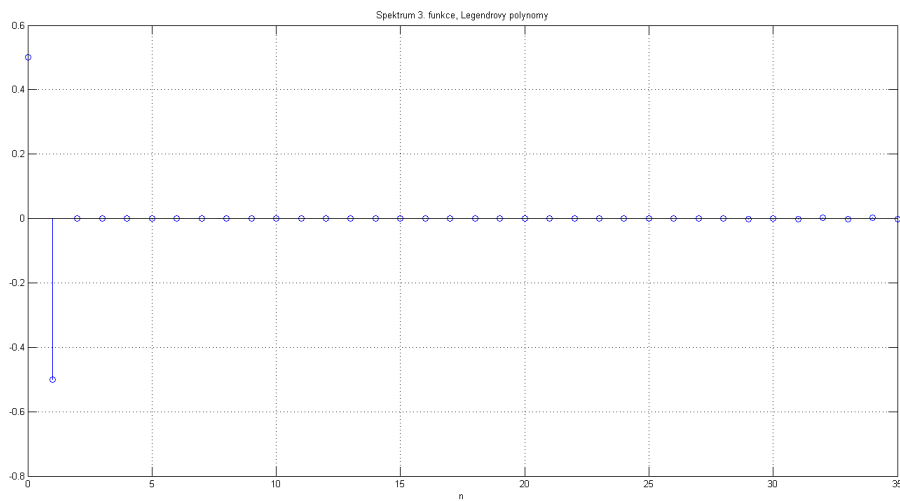
Obr. 6.19: Aproximace 3. funkce jednotlivými polynomy



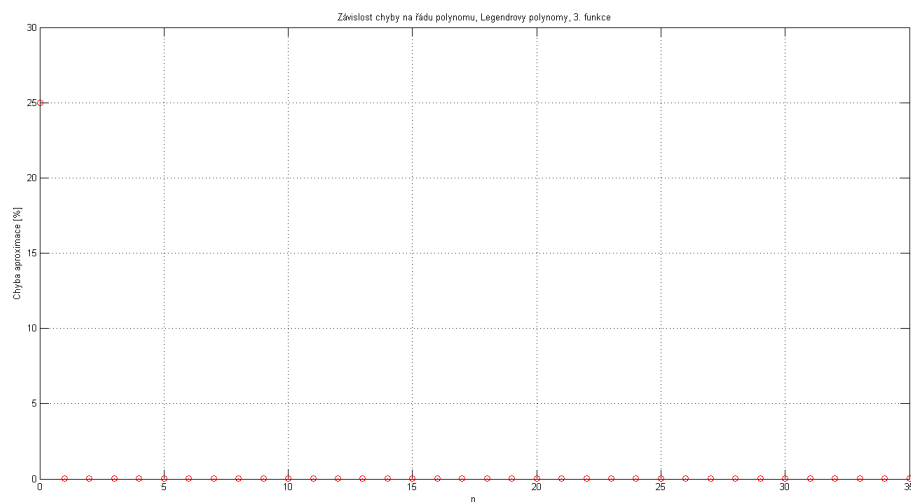
Obr. 6.20: Spektrum 3. funkce v bázi Čebyševových polynomů



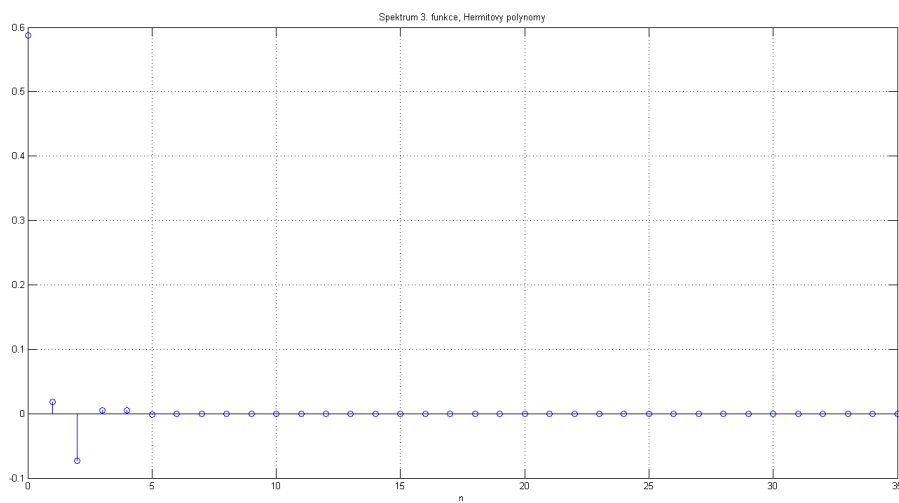
Obr. 6.21: Závislost chyby aproximace na řádu Čebyševových polynomů



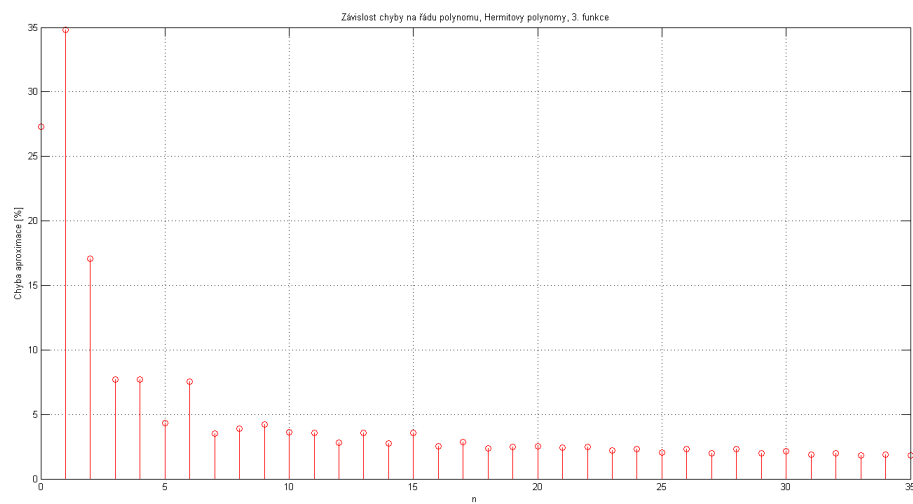
Obr. 6.22: Spektrum 3. funkce v bázi Legendrových polynomů



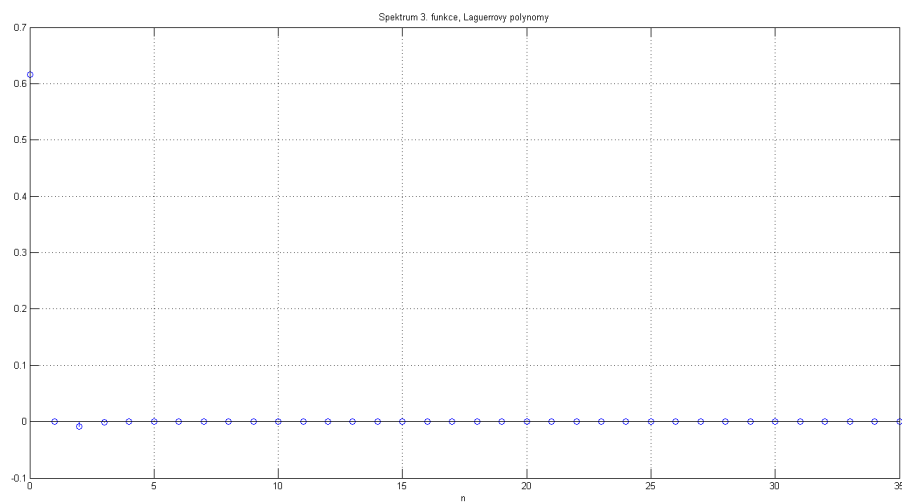
Obr. 6.23: Závislost chyby aproximace na řádu Legendrových polynomů



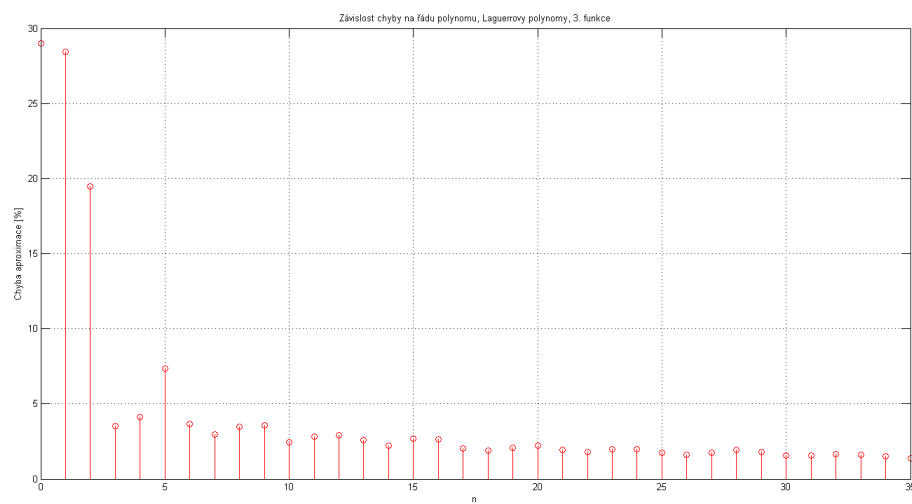
Obr. 6.24: Spektrum 3. funkce v bázi Hermitových polynomů



Obr. 6.25: Závislost chyby aproximace na řádu Hermitových polynomů



Obr. 6.26: Spektrum 3. funkce v bázi Laguerrových polynomů



Obr. 6.27: Závislost chyby aproximace na řádu Laguerrových polynomů

7 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo prostudovat a sepsat některé vlastnosti Čebyševových, Hermitových, Legendrových a Laguerrových polynomů, seznámit se s volnými parametry Hermitových a Laguerrových polynomů a jejich optimální volbou. Dále bylo úkolem v programu Matlab implementovat funkce pro transformaci signálů do bází příslušných polynomů a jako demonstraci transformovat několik signálů do všech bází a nakonec zobrazit aproximaci signálů pomocí těchto polynomů a porovnat chybu aproximace signálu jednotlivými polynomy. Všechny tyto úkoly se mi podařilo úspěšně splnit.

U Laguerrových a Hermitových polynomů bylo demonstrováno, že při správné volbě volných parametrů dané polynomy aproximují signál podstatně lépe než při nevhodném zvolení těchto parametrů.

Při porovnání chyb aproximace byly nejlépe aproximovány funkce pomocí Legendrových polynomů a nejhůře pomocí Laguerrových polynomů. Při aproximaci mě překvapilo, jak dobře dané polynomy aproximují sinusový průběh, kdy se Legendrovy a Čebyševovy polynomy dosáhly chyby cca $1,2 * 10^{-6}\%$.

LITERATURA

- [1] REKTORYS, K. a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 978-807-1961-796.
- [2] UNZEITIG, Libor. *Bakalářská práce: Ortogonální polynomy* [online]. 2008 [cit. 2015-01-04]. Dostupné z: <<http://mant.upol.cz/soubory/0devzdanePrace/B08/b08-22-1u.pdf>>. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
- [3] WOLFRAM RESEARCH. *The Wolfram Functions Site: Polynomials* [online]. 2015 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <<http://functions.wolfram.com/Polynomials/>>
- [4] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. *NIST Digital Library of Mathematical Functions: Orthogonal Polynomials* [online]. 2014 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <<http://dlmf.nist.gov/18>>
- [5] KUFNER, A., KADLEC, J.: *Fourierovy řady*. 1. vyd. Praha: Academia, 1969, 346 s. Cesta k vědě.
- [6] BRINKER, A.C. den a H.J.W. BELT. Optimal free parameters in orthonormal approximations. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1998, **46**(8): 2081-2087. DOI: 10.1109/78.705414.
- [7] E, SILVA, T. Oliveira; BELT, H. J. W. On the determination of the optimal center and scale factor for truncated Hermite series. In: *European Conference on Signal Processing (EUSIPCO-96) Trieste, Italy*. 1996.
- [8] BELT, H.J.W. a A.C. den BRINKER. Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series. *1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1997. DOI: 10.1109/icassp.1997.604708.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

| | |
|----------------|----------------------------------|
| (a, b) | otevřený interval |
| $< a, b >$ | uzavřený interval |
| (f, g) | skalární součin funkcí f a g |
| $[n]$ | dolní celá část čísla n |
| $\ f \ $ | norma funkce f |
| $\binom{n}{k}$ | kombinační číslo n nad k |
| Le_n | Legendrův polynom stupně n |
| He_n | Hermitův polynom stupně n |
| Ce_n | Čebyševův polynom stupně n |
| Le_n^α | Laguerrův polynom stupně n |
| \mathbb{R} | reálná čísla |
| \mathbb{N} | přirozená čísla |
| NaN | Not a Number - Není číslo |

SEZNAM PŘÍLOH

| | | |
|----------|--|-----------|
| A | Naprogramované funkce v Matlabu | 59 |
| A.1 | Funkce pro dopřednou transformaci | 59 |
| A.1.1 | Čebyševovy polynomy | 59 |
| A.1.2 | Hermitovy polynomy | 60 |
| A.1.3 | Laguerrovy polynomy | 61 |
| A.1.4 | Legendrovy polynomy | 63 |
| A.2 | Funkce pro zpětnou transformaci | 64 |
| A.2.1 | Čebyševovy polynomy | 64 |
| A.2.2 | Hermitovy polynomy | 64 |
| A.2.3 | Laguerrovy polynomy | 65 |
| A.2.4 | Legendrovy polynomy | 65 |
| A.3 | Funkce pro vygenerování polynomu | 66 |
| A.3.1 | Čebyševovy polynomy | 66 |
| A.3.2 | Hermitovy polynomy | 67 |
| A.3.3 | Laguerrovy polynomy | 67 |
| A.3.4 | Legendrovy polynomy | 67 |
| A.4 | Ostatní funkce | 68 |
| A.4.1 | Funkce pro výpočet chyby | 68 |
| A.4.2 | Script pro demonstraci volných parametrů | 68 |
| A.4.3 | Script na ověření konvergence | 69 |
| A.4.4 | Script s demonstračními výpočty | 70 |
| B | Obsah přiloženého CD | 77 |

A NAPROGRAMOVANÉ FUNKCE V MATLABU

A.1 Funkce pro dopřednou transformaci

A.1.1 Čebyševovy polynomy

```
function [ t0, sigma, koef ] = CeTransf( n, xmin, xmax, Y )
%CeTransf funkce spočítá volně parametry a následně
%i koeficienty zobecněné Fourierovy řady pro Čebyševovy
%polynomy
%
%vstupy:
%n - nejvyšší řád polynomu
%xmin - minimum na časové ose
%xmax - maximum na časové ose
%Y - vektor hodnot transformované funkce
%
%vystupy:
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma
%koef - vektor koeficientů zobecněné Fourierovy řady

pocetY=length(Y);
h=(xmax-xmin)/(pocetY-1);
sigma=(2/(xmax-xmin));
t0=(xmax+xmin)/2;
X=xmin:h:xmax;
X(1)=X(1)+h/100;
X(end)=X(end)-h/100;
M=zeros(pocetY,n+1);
%výpočet transformace
C1=zeros(1,length(X));C2=ones(1,length(X));
M(:,1)=Y.*C2./sqrt(1-((X-t0).*sigma).^2);
if n > 0
    C0=C1; C1=C2;
    C2=(X-t0).*sigma;
    M(:,2)=Y.*C2./sqrt(1-((X-t0).*sigma).^2);
    for i=2:n
        C0=C1;
```

```

        C1=C2;
        C2=2.*(X-t0).*sigma.*C1-C0;
        M(:,i+1)=Y.*C2./sqrt(1-((X-t0).*sigma).^2);
    end
end
koef=trapz(X,M);
koef(1)=sigma*koef(1)/pi;
for i=2:n+1
    koef(i)=sigma*koef(i)*2/pi;
end
end

```

A.1.2 Hermitovy polynomy

```

function [t0, sigma, koef]=HeTransf( n, xmin, xmax, Y, param )
%HeTransf funkce spocita volne parametry a nasledne
%i koeficienty zobecnene Fourierovy rady pro Hermitovy
%polynomy
%
%vstup:
%n - nejvyssi rad polynomu
%xmin - minimum na casove ose
%xmax - maximum na casove ose
%Y - vektor hodnot transformovane funkce
%param - pokud se rovna 'p', sigma=1, t0=0
%
%vystup:
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma
%koef - vektor koeficientu zobecnene fourierovy rady

pocetY=length(Y);
h=(xmax-xmin)/(pocetY-1);
X=xmin:h:xmax;
m0=trapz(X, Y.^2);
m1=trapz(X, (X.*(Y.^2)));
m2=trapz(X, ((X.^2).*(Y.^2)));
dY=(diff([Y,0])./h);
u0=trapz(X, (dY.^2));

```

```

sigma=((m0*u0)/(m0*m2-m1^2))^(0.25);
t0=m1/m0;
if nargin==5 & param == 'p'
sigma=1;
t0=0;
end
M=zeros(pocetY,n+1);
%vypocet transformace
H1=zeros(1,pocetY);H2=ones(1,pocetY);
M(:,1)=H2.*Y.*exp(-(((X-t0).*sigma).^2));
for i=1:n
    H0=H1;
    H1=H2;
    H2=2.*(X-t0).*sigma.*H1-2.*(i-1).*H0;
    M(:,i+1)=H2.*Y.*exp(-(((X-t0).*sigma).^2 ));
end
koef=trapz(X,M);
for i=1:n+1
    koef(i)= sigma * koef(i) /( sqrt(pi) * factorial(i-1) * ( 2^(i-1) ) );
end
end

```

A.1.3 Laguerrovy polynomy

```

function [alpha, sigma, koef]=LaTransf( n, xmin, xmax, Y, param )
%LaTransf funkce spocita volne parametry a nasledne
%i koeficienty zobecnene Fourierovy rady pro Laguerrovy
%polynomy
%
%vstup:
%n - nejvyssi rad polynomu
%xmin - minimum na casove ose
%xmax - maximum na casove ose
%Y - vektor hodnot transformovane funkce
%param - pokud se rovna 'p', sigma=1, t0=0
%
%vystupy:
%alpha - parametr alpha
%sigma - parametr sigma

```

```

%koef - vektor koeficientu zobecnene fourierovy rady

pocetY=length(Y);
h=(xmax-xmin)/(pocetY-1);
X=xmin:h:xmax;
m0=trapz(X, Y.^2);
m1=trapz(X, (X.*(Y.^2)));
Q=((X.^(-1)).*(Y.^2));
i=find(Q==inf);
Q(i)=Q(i+1);
i=find(isnan(Q));
Q(i)=Q(i+1);
m_1=trapz(X,Q);
dY=(diff([Y,0])./h);
u1=trapz(X, (X.*(dY.^2)));
sigma=2*sqrt((m_1*u1)/abs(m_1*m1-m0^2));
alpha=round(sigma*m0/m_1);
if nargin==5 & param == 'p'
sigma=1;
alpha=0;
end
M=zeros(pocetY,n+1);
%vypocet transformace
L1=zeros(1,pocetY);L2=ones(1,pocetY);
M(:,1)=L2.*Y.*((X.*sigma).^alpha).*(exp(-X.*sigma));
for i=1:n
    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1+alpha-(X.*sigma)).*L1-(i-1+alpha).*L0)./i;
    M(:,i+1)=L2.*Y.*((X.*sigma).^alpha).*(exp(-X.*sigma));
end
koef=trapz(X,M);
if alpha ~= 0
    for i=1:n+1
        koef(i)=koef(i)*sigma*factorial(i-1)/gamma(alpha+i);
    end
end
end
end

```

A.1.4 Legendrové polynomy

```
function [ t0, sigma, koef ] = LeTransf( n, xmin, xmax, Y )
%LeTransf funkce spočítá volné parametry a následně
%i koeficienty zobecněné Fourierovy řady pro Legendrových
%polynomy
%
%vstupy:
%n - nejvyšší řád polynomu
%xmin - minimum na časové ose
%xmax - maximum na časové ose
%Y - vektor hodnot transformované funkce
%
%vystupy:
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma
%koef - vektor koeficientů zobecněné Fourierovy řady

pocetY=length(Y);
h=(xmax-xmin)/(pocetY-1);
X=xmin:h:xmax;
sigma=(2/(xmax-xmin));
t0=(xmax+xmin)/2;
M=zeros(pocetY,n+1);
%výpočet transformace
L1=zeros(1,pocetY);L2=ones(1,pocetY);
M(:,1)=L2.*Y;
for i=1:n
    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1).*(X-t0).*sigma.*L1-(i-1).*L0)./i;
    M(:,i+1)=L2.*Y;
end
koef=trapz(X,M);
for i=1:n+1
    koef(i)=sigma*koef(i)*(2*i-1)/2;
end
end
```


A.2 Funkce pro zpětnou transformaci

A.2.1 Čebyševovy polynomy

```
function [ M ] = CeZTransf( Cn, X, t0, sigma )
%CeZTransf vypocita zpetnou transformaci z baze
%Cebysevovych polynomu
%Cn - koeficienty zobecnene Fourierovy rady
%X - vektor casove osy
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma

pocetX=length(X);
n=length(Cn)-1;
M=zeros(1,pocetX);
C1=zeros(1,pocetX);C2=ones(1,pocetX);
M=M+Cn(1);
if n>0
    C0=C1; C1=C2;
    C2=(X-t0).*sigma;
    M=M+C2.*Cn(2);
    for i=2:n
        C0=C1;
        C1=C2;
        C2=2.*(X-t0).*sigma.*C1-C0;
        M=M+C2.*Cn(i+1);
    end
end
end
```

A.2.2 Hermitovy polynomy

```
function [ M ] = HeZTransf( Cn, X, t0, sigma)
%HCeZTransf vypocita zpetnou transformaci z baze
%Hermitovych polynomu
%Cn - koeficienty zobecnene Fourierovy rady
%X - vektor casove osy
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma
```

```

n=length(Cn)-1;
pocetX=length(X);
M=zeros(1,pocetX);
H1=zeros(1,pocetX);H2=ones(1,pocetX);
M=M+Cn(1);
for i=1:n
    H0=H1;
    H1=H2;
    H2=2.*(X-t0).*sigma.*H1-2.*(i-1).*H0;
    M=M+H2.*Cn(i+1);
end
end

```

A.2.3 Laguerrovy polynomy

```

function [ M ] = LaZTransf( Cn, X, alpha, sigma )
%LaZTransf vypocita zpetnou transformaci z baze
%Laguerrovych polynomu
%Cn - koeficienty zobecnene Fourierovy rady
%X - vektor casove osy
%alpha - parametr alpha
%sigma - parametr sigma

n=length(Cn)-1;
pocetX=length(X);
M=zeros(1,pocetX);
L1=zeros(1,pocetX);L2=ones(1,pocetX);
M=M+Cn(1);
for i=1:n
    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1+alpha-(X.*sigma)).*L1-(i-1+alpha).*L0)./i;
    M=M+L2.*Cn(i+1);
end
end

```

A.2.4 Legendrovy polynomy

```

function [ M ] = LeZTransf( Cn, X, t0, sigma)

```

```

%LeZTransf vypocita zpetnou transformaci z baze
%Legendrovych polynomu
%Cn - koeficienty zobecnene Fourierovy rady
%X - vektor casove osy
%t0 - parametr t0
%sigma - parametr sigma

n=length(Cn)-1;
pocetX=length(X);
M=zeros(1,pocetX);
L1=zeros(1,pocetX);L2=ones(1,pocetX);
M=M+Cn(1);
for i=1:n
    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1).*(X-t0).*sigma.*L1-(i-1).*L0)./i;
    M=M+L2.*Cn(i+1);
end
end

```

A.3 Funkce pro vygenerování polynomu

A.3.1 Čebyševovy polynomy

```

function [ C2 ] = CebysevN( n, x )
%CebysevN vraci vygenerovany Cebysevuv polynom stupne n
%n - stupen polynomu
%x - vektor casove osy

C1=zeros(1,length(x)); C2=ones(1,length(x));
if n > 0
    C0=C1; C1=C2;
    C2=x;
    for i=2:n
        C0=C1;
        C1=C2;
        C2=2.*x.*C1-C0;
    end
end
end

```

```
end
```

A.3.2 Hermitovy polynomy

```
function [ H2 ] = HermitN(n, x)
%HERMITN vraci vygenerovany Hermituv polynom stupne n
%n - stupen polynomu
%x - vektor casove osy

H1=zeros(1,length(x)); H2=ones(1,length(x));
for i=1:n
    H0=H1;
    H1=H2;
    H2=2.*x.*H1-2.*(i-1).*H0;
end
end
```

A.3.3 Laguerrovy polynomy

```
function L2=LaguerreN( n, alpha, x )
%LAGUERREN vraci vygenerovany Laguerrov polynom stupne n
%n - stupen polynomu
%alpha - koeficient alpha
%x - vektor casove osy
L1=zeros(1,length(x)); L2=ones(1,length(x));
for i=1:n
    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1+alpha-x).*L1-(i-1+alpha).*L0)./i;
end
end
```

A.3.4 Legendrovy polynomy

```
function [ L2 ] = LegendreN( n, x )
%LegendreN vraci vygenerovany Legendrov polynom stupne n
%n - stupen polynomu
%x - vektor casove osy
L1=zeros(1,length(x)); L2=ones(1,length(x));
for i=1:n
```

```

    L0=L1;
    L1=L2;
    L2=((2.*i-1).*x.*L1-(i-1).*L0)./i;
end
end

```

A.4 Ostatní funkce

A.4.1 Funkce pro výpočet chyby

```

function [ delta ] = chyba( Original, Aproximace, h )
%chyba vrací kvadratickou chybu v procentech vztazenou
%k vektoru Original
%Original - vektor hodnot puvodni funkce
%Aproximace -vektor hodnot aproximace
%h - deleni casove osy
if length(Original) == length(Aproximace)
    Q=Original-Aproximace;
    Q=Q.^2;
    delta=trapz(Q)*h;
    M=trapz(Original.^2)*h;
    delta=delta*100/M;
end

```

A.4.2 Script pro demonstraci volných parametrů

```

% Skript zobrazí proběh Hermitových a Laguerrových polynomu
% pro optimalní a neoptimalní parametry
[alpha1, sigma1, koef]=LaTransf(10,1,3,[0:0.001:0.999,1:-0.001:0]);
aproxU=LaZTransf(koef,1:0.001:3,alpha1,sigma1);
chLaU=chyba(aproxU,[0:0.001:0.999,1:-0.001:0],0.001);

[alpha, sigma, koef]=LaTransf(10,1,3,[0:0.001:0.999,1:-0.001:0],'p');
aproxP=LaZTransf(koef,1:0.001:3,alpha,sigma);
chLaP=chyba(aproxP,[0:0.001:0.999,1:-0.001:0],0.001);
figure(1)
plot(1:0.001:3,[0:0.001:0.999,1:-0.001:0],1:0.001:3,...
    aproxU,1:0.001:3,aproxP);

```

```

title('Aproximace pomocí Laguerrových polynomů')
legend('Původní signál',...
strcat('Aproximace s optimálními parametry (alpha='...
,num2str(alpha1),' , sigma=',num2str(sigma1),' ) chyba='...
,num2str(chLaU),'%'),...
strcat('Aproximace s původními parametry (alpha=0 , sigma=1), chyba='...
,num2str(chLaP),'%'));
grid on;

[t01, sigma1, koef]=HeTransf(10,0,3,[0:0.001:1.5,1.499:-0.001:0]);
aproxU=HeZTransf(koef,0:0.001:3,t01,sigma1);
chHeU=chyba(aproxU,[0:0.001:1.5,1.499:-0.001:0],0.001);

[t0, sigma, koef]=HeTransf(10,0,3,[0:0.001:1.5,1.499:-0.001:0],'p');
aproxP=HeZTransf(koef,0:0.001:3,t0,sigma);
chHeP=chyba(aproxP,[0:0.001:1.5,1.499:-0.001:0],0.001);

figure(2);
plot(0:0.001:3,[0:0.001:1.5,1.499:-0.001:0],0:0.001:3,...
      aproxU,0:0.001:3,aproxP);
title('Aproximace pomocí Hermitových polynomů')
legend('Původní signál',...
strcat('Aproximace s optimálními parametry (t0=',num2str(t01),...
' , sigma=',num2str(sigma1),' ) chyba=',num2str(chHeU),'%')...
,strcat('Aproximace s původními parametry (t0=0 , sigma=1), chyba='...
,num2str(chHeP),'%'));
grid on;

```

A.4.3 Script na ověření konvergence

```

% Skript na overeni konvergence, pouze ulozi do matice pocty nul
% jednotlivych radu polynomu
clear X; clear A; clear i; clear k; clear V;

h=200000
X=linspace(-1,1,h);
Xh=linspace(-28,28,h);
Xla=linspace(0,2000,h);
V=zeros(1,401);

```

```

for j=0:400
    A=CebysevN(j,X);
    i=1:length(A)-1;
    k=find((A(i)>=0&A(i+1)<0)|(A(i)<=0&A(i+1)>0));
    V(1,j+1)=length(k);

    A=LegendreN(j,X);
    i=1:length(A)-1;
    k=find((A(i)>=0&A(i+1)<0)|(A(i)<=0&A(i+1)>0));
    V(2,j+1)=length(k);

    A=HermitN(j,Xh);
    i=1:length(A)-1;
    k=find((A(i)>=0&A(i+1)<0)|(A(i)<=0&A(i+1)>0));
    V(3,j+1)=length(k);

    A=LaguerreN(j,0,Xla);
    i=1:length(A)-1;
    k=find((A(i)>=0&A(i+1)<0)|(A(i)<=0&A(i+1)>0));
    V(4,j+1)=length(k);
end

```

A.4.4 Script s demonstračními výpočty

```

%Skript pro vykreslení všech průběhů do kapitoly Ukazka transforamce
% několika signálu do jednotlivých bází
fce1= [0:0.001:10,9.999:-0.001:0];
fce2=sin(pi:0.001:3*pi);
fce3=1:-0.0005:0;
%% první funkce
err=zeros(4,36);
for i=1:36
    [ht0, hsigma, hkoef]=HeTransf((i-1),2,22,fce1);
    haprox=HeZTransf(hkoef,2:0.001:22,ht0,hsigma);
    err(1,i)=chyba(fce1,haprox,0.001);

    [ct0, csigma, ckoef]=CeTransf((i-1),2,22,fce1);
    caprox=CeZTransf(ckoef,2:0.001:22,ct0,csigma);

```

```

err(2,i)=chyba(fce1,caprox,0.001);

[let0, lesigma, lekoef]=LeTransf((i-1),2,22,fce1);
leaprox=LeZTransf(lekoef,2:0.001:22,let0,lesigma);
err(3,i)=chyba(fce1,leaprox,0.001);

[alpha, lasigma, lakoeff]=LaTransf((i-1),2,22,fce1);
laaprox=LaZTransf(lakoeff,2:0.001:22,alpha,lasigma);
err(4,i)=chyba(fce1,laaprox,0.001);
end

figure(11);
stem(0:35,err(1,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Hermitovy polynomy, 1. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(12);
stem(0:35,err(2,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Čebyševovy polynomy, 1. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(13);
stem(0:35,err(3,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Legendrovy polynomy, 1. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(14);
stem(0:35,err(4,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Laguerrovy polynomy, 1. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(15);
stem(0:35,hkoef);
title('Spektrum 1. funkce, Hermitovy polynomy');
xlabel('n');

```



```

grid on;
figure(16);
stem(0:35,ckoef);
title('Spektrum 1. funkce, Čebyševovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(17);
stem(0:35,lekoef);
title('Spektrum 1. funkce, Legendrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(18);
stem(0:35,lakoef);
title('Spektrum 1. funkce, Laguerrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(19)
plot(2:0.001:22,fce1,2:0.001:22,haprox,2:0.001:22,caprox,...
     2:0.001:22,leaprox,2:0.001:22,laaprox);
grid on;
title('Aproximace první funkce');
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
legend('Původní signál',...
strcat('Aproximace Hemmitovými polynomy (t0=',num2str(ht0),...
', sigma=',num2str(hsigma),') chyba=',num2str(err(1,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Čebyševovými polynomy (t0=',num2str(ct0),...
', sigma=',num2str(csigma),') chyba=',num2str(err(2,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Legendrovými polynomy (t0=',num2str(let0),...
', sigma=',num2str(lesigma),') chyba=',num2str(err(3,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Laguerrovými polynomy (alpha=',num2str(alpha),...
', sigma=',num2str(lasigma),') chyba=',num2str(err(4,end)),'%'));

%% druhá funkce
err=zeros(4,36);
for i=1:36
    [ht0, hsigma, hkoef]=HeTransf((i-1),pi,3*pi,fce2);
    haprox=HeZTransf(hkoef,pi:0.001:3*pi,ht0,hsigma);
    err(1,i)=chyba(fce2,haprox,0.001);

```

```

[ct0, csigma, ckoef]=CeTransf((i-1),pi,3*pi,fce2);
caprox=CeZTransf(ckoef,pi:0.001:3*pi,ct0,csigma);
err(2,i)=chyba(fce2,caprox,0.001);

[let0, lesigma, lekoef]=LeTransf((i-1),pi,3*pi,fce2);
leaprox=LeZTransf(lekoef,pi:0.001:3*pi,let0,lesigma);
err(3,i)=chyba(fce2,leaprox,0.001);

[alpha, lasigma, lakoeff]=LaTransf((i-1),pi,3*pi,fce2);
laaprox=LaZTransf(lakoeff,pi:0.001:3*pi,alpha,lasigma);
err(4,i)=chyba(fce2,laaprox,0.001);
end

figure(21);
stem(0:35,err(1,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Hermitovy polynomy, 2. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(22);
stem(0:35,err(2,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Čebyševovy polynomy, 2. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(23);
stem(0:35,err(3,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Legendrovy polynomy, 2. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(24);
stem(0:35,err(4,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Laguerrovy polynomy, 2. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(25);

```

```

stem(0:35,hkoef);
title('Spektrum 2. funkce, Hermitovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(26);
stem(0:35,ckoef);
title('Spektrum 2. funkce, Čebyševovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(27);
stem(0:35,lekoef);
title('Spektrum 2. funkce, Legendrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(28);
stem(0:35,lakoef);
title('Spektrum 2. funkce, Laguerrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(29)
plot(pi:0.001:3*pi,fce2,pi:0.001:3*pi,haprox,pi:0.001:3*pi,caprox,...
      pi:0.001:3*pi,leaprox,pi:0.001:3*pi,laaprox);
grid on;
title('Aproximace druhé funkce');
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
legend('Původní signál',...
strcat('Aproximace Hemmitovými polynomy (t0=',num2str(ht0),...
', sigma=',num2str(hsigma),') chyba=',num2str(err(1,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Čebyševovými polynomy (t0=',num2str(ct0),...
', sigma=',num2str(csigma),') chyba=',num2str(err(2,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Legendrovými polynomy (t0=',num2str(let0),...
', sigma=',num2str(lesigma),') chyba=',num2str(err(3,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Laguerrovými polynomy (alpha=',num2str(alpha),...
', sigma=',num2str(lasigma),') chyba=',num2str(err(4,end)),'%'));

%% treti funkce
err=zeros(4,36);
for i=1:36

```

```

[ht0, hsigma, hkoef]=HeTransf((i-1),2,4,fce3);
haprox=HeZTransf(hkoef,2:0.001:4,ht0,hsigma);
err(1,i)=chyba(fce3,haprox,0.001);

[ct0, csigma, ckoef]=CeTransf((i-1),2,4,fce3);
caprox=CeZTransf(ckoef,2:0.001:4,ct0,csigma);
err(2,i)=chyba(fce3,caprox,0.001);

[let0, lesigma, lekoef]=LeTransf((i-1),2,4,fce3);
leaprox=LeZTransf(lekoef,2:0.001:4,let0,lesigma);
err(3,i)=chyba(fce3,leaprox,0.001);

[alpha, lasigma, lakoeff]=LaTransf((i-1),2,4,fce3);
laaprox=LaZTransf(lakoeff,2:0.001:4,alpha,lasigma);
err(4,i)=chyba(fce3,laaprox,0.001);
end

figure(31);
stem(0:35,err(1,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Hermitovy polynomy, 3. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(32);
stem(0:35,err(2,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Čebyševovy polynomy, 3. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(33);
stem(0:35,err(3,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Legendrové polynomy, 3. funkce');
xlabel('n');
ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(34);
stem(0:35,err(4,:),'.');
title('Závislost chyby na řádu polynomu, Laguerrové polynomy, 3. funkce');
xlabel('n');

```

```

ylabel('Chyba aproximace [%]');
grid on;
figure(35);
stem(0:35,hkoef);
title('Spektrum 3. funkce, Hermitovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(36);
stem(0:35,ckoef);
title('Spektrum 3. funkce, Čebyševovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(37);
stem(0:35,lekoef);
title('Spektrum 3. funkce, Legendrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(38);
stem(0:35,lakoef);
title('Spektrum 3. funkce, Laguerrovy polynomy');
xlabel('n');
grid on;
figure(39)
plot(2:0.001:4,fce3,2:0.001:4,haprox,2:0.001:4,caprox,...
     2:0.001:4,leaprox,2:0.001:4,laaprox);
grid on;
title('Aproximace třetí funkce');
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
legend('Původní signál',...
strcat('Aproximace Hemmitovými polynomy (t0=',num2str(ht0),...
', sigma=',num2str(hsigma),') chyba=',num2str(err(1,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Čebyševovými polynomy (t0=',num2str(ct0),...
', sigma=',num2str(csigma),') chyba=',num2str(err(2,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Legendrovými polynomy (t0=',num2str(let0),...
', sigma=',num2str(lesigma),') chyba=',num2str(err(3,end)),'%'),...
strcat('Aproximace Laguerrovými polynomy (alpha=',num2str(alpha),...
', sigma=',num2str(lasigma),') chyba=',num2str(err(4,end)),'%'));

```

B OBSAH PŘÍLOŽENÉHO CD

Seznam souborů na CD:

Tento soubor je přímo na CD. Ve složce matlab:

- CebysevN.m - funkce na vygenerování Čebyševova polynomu
- CeTransf.m - funkce pro transformaci do báze Čebyševových polynomů
- CeZTransf.m - funkce pro zpětnou transformaci z Čebyševových polynomů
- HebysevN.m - funkce na vygenerování Hermitova polynomu
- HeTransf.m - funkce pro transformaci do báze Hermitových polynomů
- HeZTransf.m - funkce pro zpětnou transformaci z Hermitových polynomů
- LabysevN.m - funkce na vygenerování Laguerrova polynomu
- LaTransf.m - funkce pro transformaci do báze Laguerrových polynomů
- LaZTransf.m - funkce pro zpětnou transformaci z Laguerrových polynomů
- LebysevN.m - funkce na vygenerování Legendrova polynomu
- LeTransf.m - funkce pro transformaci do báze Legendrových polynomů
- LeZTransf.m - funkce pro zpětnou transformaci z Legendrových polynomů
- chyba.m - funkce pro výpočet chyby aproximace
- konvergence.m - script pro ověření konvergence polynomů
- VolneParam.m - script pro demonstraci volných parametrů
- demo.m - script pro demonstraci transformací do jednotlivých bází.

Všechny funkce byly napsány a vyzkoušeny v programu Matlab 2012b.